Fonctions et limites

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan.
a, l et M désigne des nombres réels.

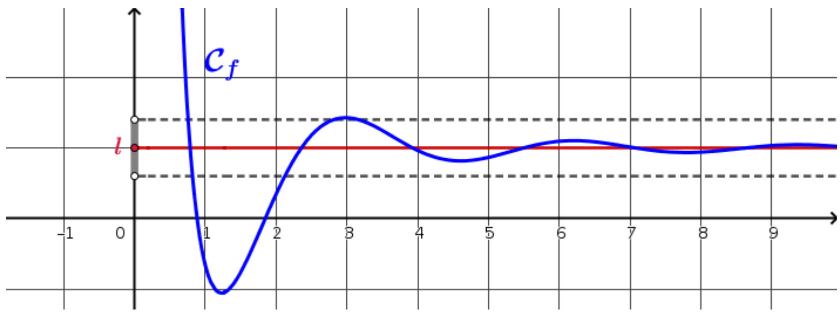
I Limite finie en l'infini et asymptote horizontale

Définition : Soit f définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$.

Si tout intervalle ouvert, contenant l, contient toutes les valeurs de f lorsque x devient "suffisamment grand" alors, on écrit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=l}$.

La droite d'équation $y=l$ est appelée asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Illustration :

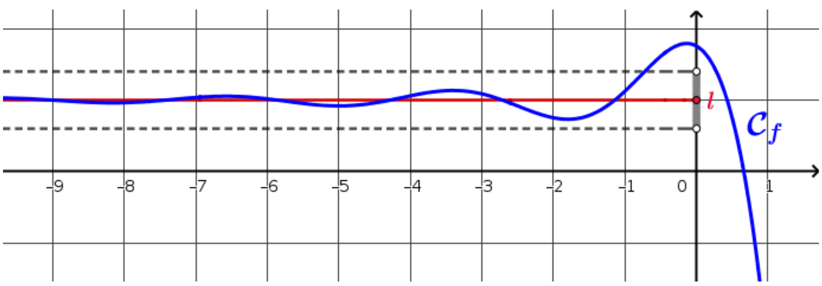


Définition : De manière analogue, si f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;a[$.

Si tout intervalle ouvert, contenant l, contient toutes les valeurs de f lorsque x devient "suffisamment petit" alors, on écrit que f a pour limite l en $-\infty$ et on note $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=l}$.

La droite d'équation $y=l$ est appelée asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Illustration :



Exercice 1 : A l'aide d'une représentation obtenue grâce à la calculatrice,

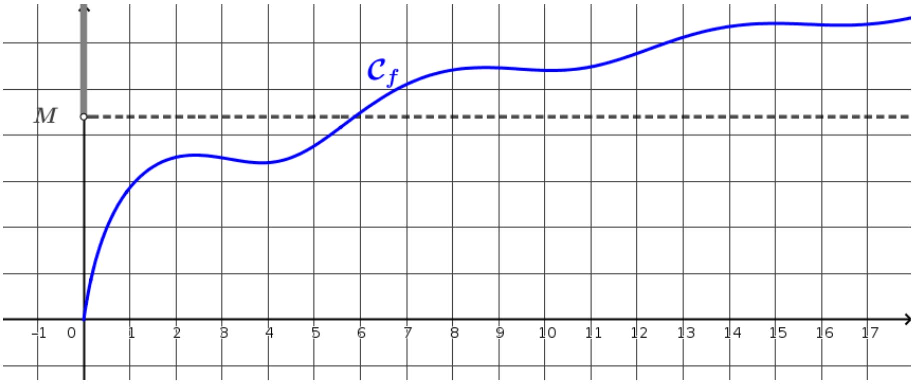
1) Conjecturer la limite et l'asymptote en $+\infty$ des fonctions $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, e^{-x} et e^{-2x}.
2) Conjecturer la limite et l'asymptote en $-\infty$ des fonctions $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, e^{x} et e^{3x}.
3) Pour tout entier $n \geqslant 1$, en déduire la limite et l'asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$ de $\frac{1}{x^n}$.
4) Pour tout réel $a<0$, en déduire la limite et l'asymptote en $+\infty$ de e^{ax}.
5) Pour tout réel $a>0$, en déduire la limite et l'asymptote en $-\infty$ de e^{ax}.

II Limite infinie en l'infini

Définition : Soit f définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$.

Si tout intervalle de la forme $]M;+\infty[$, contient toutes les valeurs de f lorsque x devient "suffisamment grand" alors, on écrit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

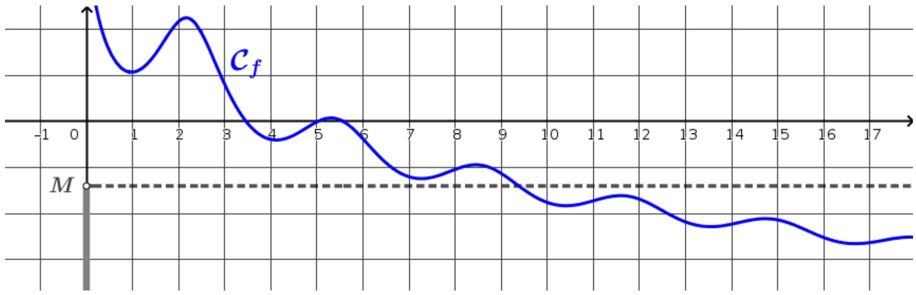
Illustration :



Définition : De manière analogue, soit f définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$.

Si tout intervalle de la forme $]-\infty;M[$, contient toutes les valeurs de f lorsque x devient "suffisamment grand" alors, on écrit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$.

Illustration :



Exercice 2 : A l'aide d'une représentation obtenue grâce à la calculatrice,

1) Conjecturer la limite en $+\infty$ des fonctions x, x^2, x^3, $\sqrt{x}$, e^x et e^{3x}.
2) Pour tout entier $n\geqslant 1$, en déduire la limite en $+\infty$ de x^n.
3) Pour tout réel $a>0$, en déduire la limite en $+\infty$ de e^{ax}.

Exercice 3 : Définir de manière analogue puis illustrer $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

Exercice 4 : A l'aide d'une représentation obtenue grâce à la calculatrice,

1) Conjecturer la limite en $-\infty$ des fonctions x, x^2, x^3 x^4, e^{-x} et e^{-2x}.
2) Pour tout entier $n\geqslant 1$, en déduire la limite en $-\infty$ de x^n.
3) Pour tout réel $a<0$, en déduire la limite en $-\infty$ de e^{ax}.

III Limite infinie en un réel et asymptote verticale

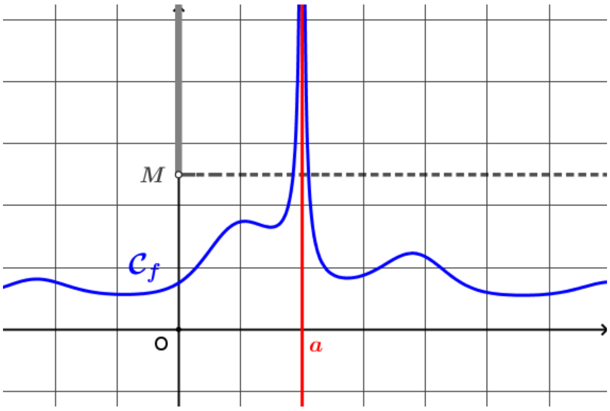
Définition : u et v sont deux réels tels que $u<a<v$.

Soit f définie sur l'un des intervalles $]u;a[$ ou $]a;v[$ ou sur les deux.

Si tout intervalle de la forme $]M;+\infty[$, contient toutes les valeurs de f lorsque x devient "suffisamment proche" de a alors, on écrit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=+\infty}$

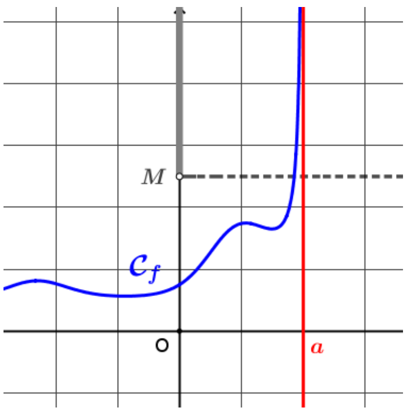
La droite d'équation $x=a$ est appelée asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

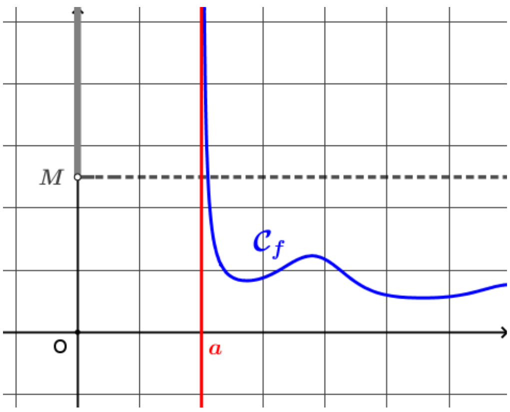
Illustration :



Remarque : Cette limite infinie peut n'exister qu'à gauche ou qu'à droite de a.
Dans ce cas, on parle de limite à gauche ou à droite de a et on note respectivement :

$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=+\infty}$ ou encore $\boxed{\lim_{x\to a-} f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to a+} f(x)=+\infty}$.





Exercice 5 : Définir puis illustrer $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=-\infty}$, $\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=-\infty}$ et $\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty}$.

Exercice 6 : A l'aide d'une représentation obtenue grâce à la calculatrice,

1) Conjecturer la limite et l'asymptote de la fonction $\dfrac{1}{x^2}$ en 0.

2) Conjecturer la limite à droite et l'asymptote des fonctions $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0.

3) Conjecturer la limite à gauche et l'asymptote des fonctions $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x^3}$ en 0.

4) Pour tout entier $n\geqslant 1$, en déduire le comportement en 0 des fonctions $\dfrac{1}{x^n}$.

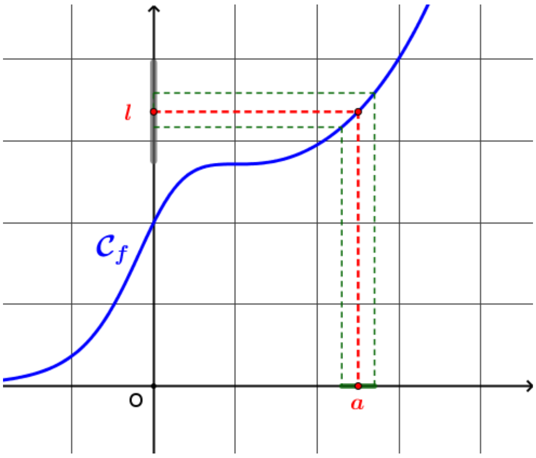
IV Limite finie en un réel

Définition : u et v sont deux réels tels que $u<a<v$.

Soit f définie sur l'un des intervalles $]u;a[$ ou $]a;v[$ ou sur les deux.

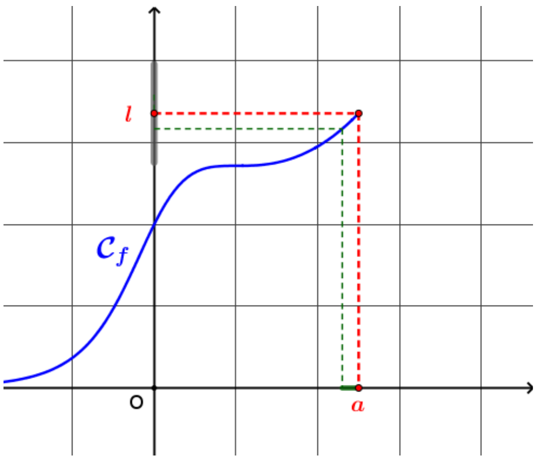
Si tout intervalle ouvert contenant l, contient toutes les valeurs de f lorsque x devient "suffisamment proche" de a alors, on écrit que f a pour limite l en a et on note $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=l}$.

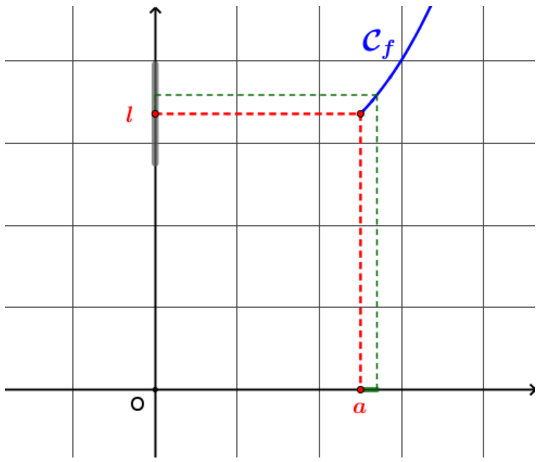
Illustration :



Remarque : Cette limite infinie peut n'exister qu'à gauche ou qu'à droite de a.
Dans ce cas, on parle de limite à gauche ou à droite de a et on note respectivement :

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=l$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=l$ ou encore $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=l$





Exercice 7 : Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) À l'aide de la calculatrice, obtenir la représentation graphique de f pour des abscisses allant de -4 à 4 et des ordonnées allant de -1 à 5.
3) La fonction f admet-elle une limite en 0 ? Si oui, laquelle ?

V Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions et l et l' deux réels.

Limite d'une somme :

Le tableau ci-contre donne $\lim f+g$ lorsqu'elle existe.

$\lim f$ \ $\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l			
$+\infty$			
$-\infty$			

Limite d'un produit :

Le tableau ci-contre donne $\lim f \times g$ lorsqu'elle existe.

$\lim f$ \ $\lim g$	$l'>0$	$l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l>0$					
$l<0$					
0					
$+\infty$					
$-\infty$					

Limite d'un inverse :

$\lim f$	$l \neq 0$	0 et $f>0$	0 et $f<0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$					

Limite d'un quotient :

Puisque $\frac{f}{g}=f\times\frac{1}{g}$ alors les deux tableaux précédents permettent de conclure.

Exercice 8 : Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+5x-7$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$.

Remarque : Dans les cas d'indétermination, un calcul supplémentaire est en général nécessaire pour "lever" l'indétermination

Exercice 9 : Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+5x-7$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-2x+1}{6x^2-5}$.

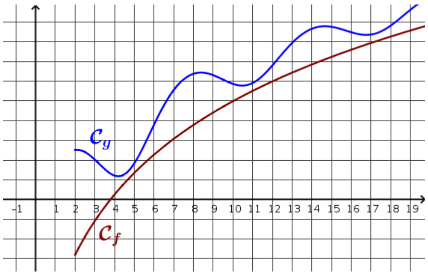
Exercice 10 : Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{3x+1}{2-x}$.

1) Montrer que la droite d'équation $y=-3$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$
2) Montrer que la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

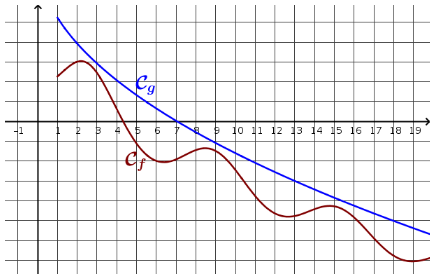
VI Limites et comparaisons ou encadrement

Théorème de comparaison : Soit f et g deux fonctions définies sur $]a;+\infty[$ telles que $f(x)\leqslant g(x)$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$



Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$



Théorèmes analogues :

- Pour f et g sont définies sur $]-\infty;a[$, on peut remplacer $x\to+\infty$ par $x\to-\infty$.
- Pour f et g sont définies sur $]u;a[$ ou $]a;v[$ ou sur les deux, on peut remplacer $x\to+\infty$ par $x\to a$.

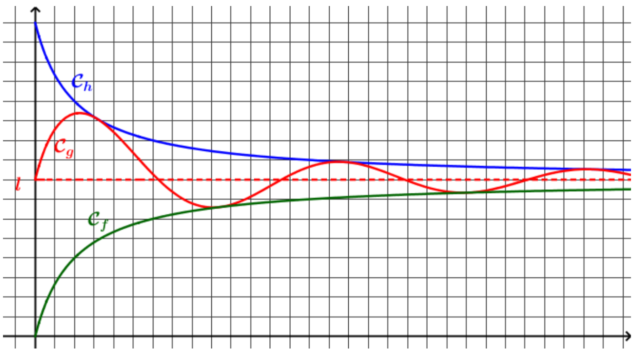
Exercice 11 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\cos(x)$

1) Justifier que pur tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geqslant x-1$.
2) En déduire la limite de f en $+\infty$.
3) Déterminer par une méthode analogue la limite de f en $-\infty$.

Théorème d'encadrement :

Soit f, g et h trois fonctions définies sur $]a;+\infty[$.

Si $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=l$.



Théorèmes analogues :

- Pour f, g et h définies sur $]-\infty;a[$, on peut remplacer $x\to+\infty$ par $x\to-\infty$.
- Pour f, g et h définies sur $]u;a[$ ou $]a;v[$ ou sur les deux, on peut remplacer $x\to+\infty$ par $x\to a$.
-

Exercice 12 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{x^2+1}$

1) Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{-1}{x^2+1}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{x^2+1}$
2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

