Probabilités

I Probabilité conditionnelle

L'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire, l'univers $\mathcal{E}$, est muni d'une probabilité P.

Définition : A est un événement de $\mathcal{E}$ tel que $P(A)\neq 0$.
Pour tout événement B de $\mathcal{E}$, la " probabilité de B sachant A " est la probabilité que B se réalise sachant A est déjà réalisé. On la note $P_A(B)$ et l'on a :

$$\boxed{P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

Exercice 1 : Dans mes courriels 60 % sont des publicités, 30 % ont un contenu intéressant et 5 % sont des publicités intéressantes. Quand j'ouvre un courriel de publicité, quelle probabilité qu'il contienne une offre intéressante ?

Propriété : Sur $\mathcal{E}$, P_A définie une nouvelle probabilité, dite probabilité conditionnelle.
On a donc, pour tout événement B de $\mathcal{E}$, $0\leqslant P_A(B)\leqslant 1$ et $P_A(B)+P_A(\overline{B})=1$

Remarque : Si $P(B)\neq 0$ on a de la même manière $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Formule des probabilités composées :
Pour tous événements A et B de $\mathcal{E}$, si $P(A)\neq 0$ alors $\boxed{P(A\cap B)=P_A(B)\times P(A)}$

De même, si $P(B)\neq 0$ alors $P(A\cap B)=P_B(A)\times P(B)$

Exercice 2 : Un vaccin est efficace à 98 %
Lors d'une campagne de vaccination on a couvert 80 % d'une population.
On choisi ensuite une personne au hasard dans cette population, quelle est la probabilité que la personne soit vaccinée et malade ?

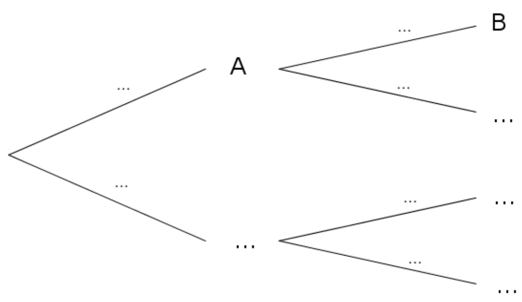
Illustrations : A et B sont deux événements tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$

Sous forme de tableau des probabilités

	B	$\overline{B}$	Total
A			
$\overline{A}$			
Total			

Probabilités manquantes :

Sous forme d'arbre des probabilités



Probabilités manquantes :

Exercice 3 : Illustrer l'exercice 2 de deux manières.

JM Lambert - Lycée Bellevue - Le Mans

II Partition de l'univers

Définition : Une famille d'événements forme une partition de l'univers s'ils sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est l'univers.

Autrement dit : Une famille d'événements A_1, A_2, ... , A_n de l'univers $\mathcal{E}$ forme une partition de l'univers si, pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \mathcal{E}$

Exemple : Un événement A et son contraire forment une partition de $\mathcal{E}$.

Formule des probabilités totales :

Soit A_1, A_2, ... , A_n une partition de l'univers $\mathcal{E}$ et B un événement de $\mathcal{E}$,

alors $\boxed{P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)}$

Si, de plus, chaque A_i a une probabilité non nulle, avec la formule des probabilité composées,

alors $\boxed{P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \ldots, + P_{A_n}(B) \times P(A_n)}$

Exercice 6 : Dans un magasin, on solde, 30 % des vêtements femme, 40 % des vêtements homme et 50 % des vêtements enfant. Le stock du magasin est constitué pour moitié de vêtements femme, un tiers de vêtements homme et le reste de vêtements pour enfant.

Une personne ayant acheté un vêtement sort du magasin. Quelle est la probabilité qu'elle ait bénéficié d'une réduction ?

Cas particulier : Soit A et B deux événements de $\mathcal{E}$ alors $\boxed{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})}$.

Si, de plus, $0 < P(A) < 1$ alors $\boxed{P(B) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A})}$

Exercice 7 : Au lycée, on recense 30 % de fumeurs. 80 % des non fumeurs se disent gênés par la fumée de cigarette alors seul 25 % des fumeurs le sont.
On choisi un élève au hasard, quelle est la probabilité que la fumée de cigarette le dérange ?

III Indépendance

Définition : Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Remarque : Ne pas confondre avec des événements incompatibles (lorsque $A \cap B = \emptyset$)

Propriété : Soit A et B deux événements de probabilité non nulle, alors il est équivalent d'écrire :

(1) A et B sont indépendants

(2) $P_A(B) = P(B)$

(3) $P_B(A) = P(A)$

Démonstration 1

Exercice 8 : On choisi au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On note A l'événement "La carte piochée est un as" et B l'événement "La carte piochée est un pique".

A et B sont-ils incompatibles ? A et B sont-ils indépendants ?

Propriété : Soit A et B deux événements indépendants alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

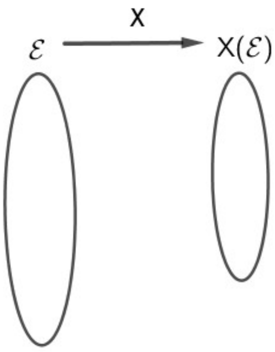
Démonstration 2

Corollaire : Soit A et B deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration 3

IV Variables aléatoires discrètes

Définition : Une variable aléatoire discrète sur $\mathcal{E}$ est une fonction qui à chaque élément de $\mathcal{E}$ associe un nombre réel.



Notations : $\mathcal{E} = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \dots ; \omega_k\}$.

On note X($\mathcal{E}$) $= \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\} \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des images des éléments de $\mathcal{E}$, alors pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $(\mathrm{X} = x_i)$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui ont pour image x_i par la fonction X.

Autrement dit, $(\mathrm{X} = x_i)$ est l'événement formé de toutes les issues ω telles que $\mathrm{X}(\omega) = x_i$.

Exercice 9 :

Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7. Les boules 1 à 3 sont rouges et les autres sont bleues. Un joueur tire une boule au hasard. Si le numéro est pair alors il gagne 5€ et si elle est bleue alors il perd 3€. On définie alors la variable aléatoire X égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur.

Définir $\mathcal{E}$, X($\mathcal{E}$) et tous les événements de la forme $(\mathrm{X} = x_i)$.

V Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition : Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X, c'est donner pour chaque valeur x_i que prend X une probabilité p_i.

Conséquences : Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $p_i = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$ avec $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Présentation :

x_i	x_1	x_2		x_n
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	p_1	p_2		p_n

Définitions :

- L'espérance d'une variable aléatoire X est la moyenne des valeurs x_i, pondérées par les p_i.

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X}) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

- La variance de X est la moyenne des carrés des écarts des x_i à l'espérance, pondérés par les p_i.

$$\boxed{\mathrm{V}(\mathrm{X}) = p_1 (x_1 - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 + p_2 (x_2 - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 + \dots + p_n (x_n - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2}$$

- L'écart type de X est la racine carrée de la variance $\boxed{\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}}$

Théorème de König[1]-Huygens[2] : $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\,2} - (\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2$ ou encore $\boxed{\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - (\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2}$

Exercice 10 : On donne 10 euros pour participer au jeu suivant :
On pioche une carte dans un jeu de 32 cartes, si cette carte est un as on gagne 50 euros, si cette carte est une tête on gagne 10 euros et dans les autres cas, on ne gagne rien.
On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
Donner la loi de X et son espérance et son écart type. Interpréter.

1 **Johann Samuel König**, né le 31 juillet 1712 à Büdingen, mort le 21 août 1757 à Zuilenstein, est un mathématicien allemand.
2 **Christian Huygens**, né le 14 avril 1629 à La Haye (dans les Provinces-Unies) et mort le 8 juillet 1695 dans la même ville, est un mathématicien, un astronome et un physicien néerlandais. (Source Wikipédia)