Suites et limites

I Limite d'une suite

En examinant le comportement des termes d'une suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$, on peut dégager trois attitudes :

(1) Les termes se rapprochent, autant que l'on veut, d'une valeur réelle.

(2) Les termes deviennent aussi grands (ou aussi petits) que l'on veut.

(3) Les termes ont une autre attitude que les deux précédentes.

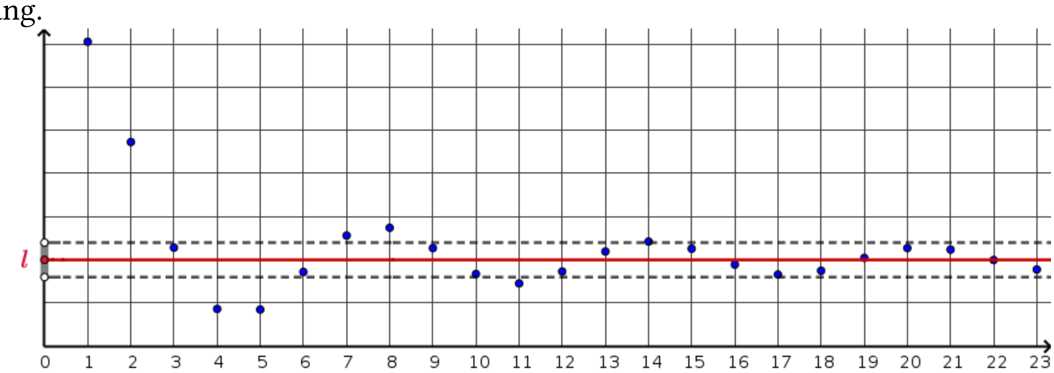
Dans le cas (1) on dit que la suite (u_n) est convergente et dans les cas (2) et (3) que la suite (u_n) est divergente. Nous allons préciser ces comportements.

1) Limite finie d'une suite

Définition : Une suite (u_n) a pour limite le réel l quand n tend vers $+\infty$, si les termes se rapprochent autant que l'on veut de l lorsque n devient grand.

Précisément, lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Illustration :



Dans ce cas, on dit que la suite est **convergente** et l'on note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l}$ ou encore $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l}$

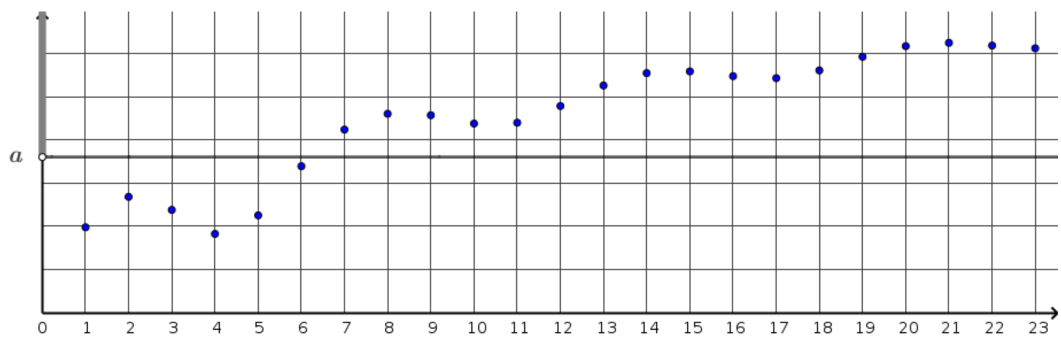
Exercice 1 : Conjecturer la limite des suites $\left(\frac{1}{n}\right)$; $\left(\frac{1}{n^2}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ puis $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2) Limite infinie d'une suite

Définition : Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si les termes deviennent aussi grands que l'on veut lorsque n devient grand.

Précisément, tout intervalle $]a;+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Illustration :



Dans ce cas, on dit que la suite est **divergente** et on note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ ou encore $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

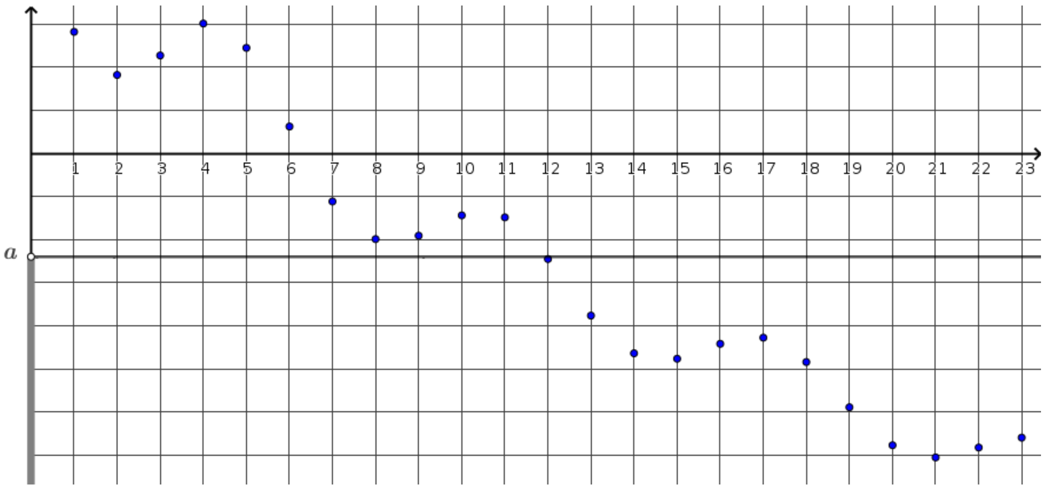
Exercice 2 : Conjecturer la limite des suites $(\sqrt{n})$; (n) ; (n^2) et (n^k) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

De même : Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si les termes deviennent aussi petits que l'on veut lorsque n devient grand.

Précisément, lorsque tout intervalle $]-\infty ; a[$ avec $a \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Dans ce cas, on dit que la suite est **divergente** et on note $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$ ou encore $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\to} -\infty}$

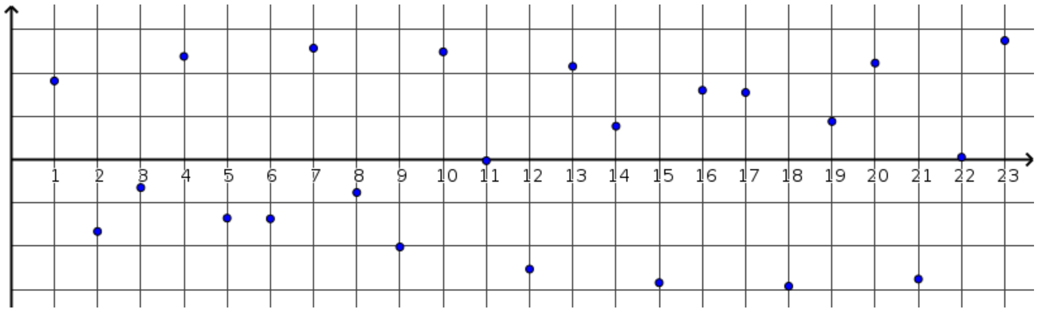
Illustration :



3) Autres cas

Définition : Une suite qui n'a ni limite finie, ni limite infinie est, dans ce cas aussi, **divergente**.

Illustration :



Exercice 3 : Conjecturer le comportement à l'infini des suites $((-1)^n)$ et $(\cos(n))$

II Limite de suites particulières

Propriété : Soit u une suite arithmétique de raison r

- Si $r > 0$ alors la suite u est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$ alors la suite u est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Propriété : Soit la suite géométrique (q^n)

- Si $q > 1$ alors (q^n) est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $0 \leqslant q < 1$ alors (q^n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Exercice 4 : Conjecturer le comportement des suites $((-2)^n)$ et $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

III Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

Premier constat : Compléter les égalités ci-dessous et conclure.

$\begin{cases} u_n = 2n \\ v_n = -3n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ldots \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots \end{cases}$ or, $u_n + v_n = \ldots$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n = \ldots$

$\begin{cases} u_n = 3n \\ v_n = -2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ldots \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots \end{cases}$ or, $u_n + v_n = \ldots$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n = \ldots$

$\begin{cases} u_n = n \\ v_n = -n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ldots \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots \end{cases}$ or, $u_n + v_n = \ldots$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n = \ldots$

Propriété : Soit u et v deux suites et l et l' deux réels.
Le tableau ci-contre donne $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n$ lorsqu'elle existe.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l			
$+\infty$			
$-\infty$			

Exercice 5 : Déterminer la limite des suites $(n^2 + 5n - 7)$ et $\left(2 + \dfrac{1}{n} + \sqrt{n}\right)$.

2) Limite d'un produit

Deuxième constat : Compléter les égalités ci-dessous et conclure.

$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{n} \\ v_n = n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ldots \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots \end{cases}$ or, $u_n \times v_n = \ldots$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n = \ldots$

$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{n^2} \\ v_n = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ldots \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots \end{cases}$ or, $u_n \times v_n = \ldots$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n = \ldots$

$\begin{cases} u_n = n \\ v_n = \dfrac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ldots \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots \end{cases}$ or, $u_n \times v_n = \ldots$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n = \ldots$

Propriété : Soit u et v deux suites et l et l' deux réels.
Le tableau ci-contre donne $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n$ lorsqu'elle existe.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$					
$l < 0$					
0					
$+\infty$					
$-\infty$					

Exercice 6 : Déterminer la limite des suites $\left(\left(2+\frac{1}{n}\right)\sqrt{n}\right)$ et $(4n^2-12n+15)$.

3) Limite d'un inverse

Propriété : Soit u une suite et l un réel.
Le tableau ci-contre donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n}$ lorsqu'elle existe.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$l\neq 0$	0 et $u_n>0$	0 et $u_n<0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n}$					

4) Limite d'un quotient

Puisque $\frac{u_n}{v_n}=u_n\times\frac{1}{v_n}$ alors les deux tableaux précédents permettent de conclure.

Exercice 7 : Déterminer la limite des suites $\left(\frac{\sqrt{n}}{4+\frac{1}{n}}\right)$ et $\left(\frac{n+4}{n^2-3}\right)$

IV Limites et comparaisons

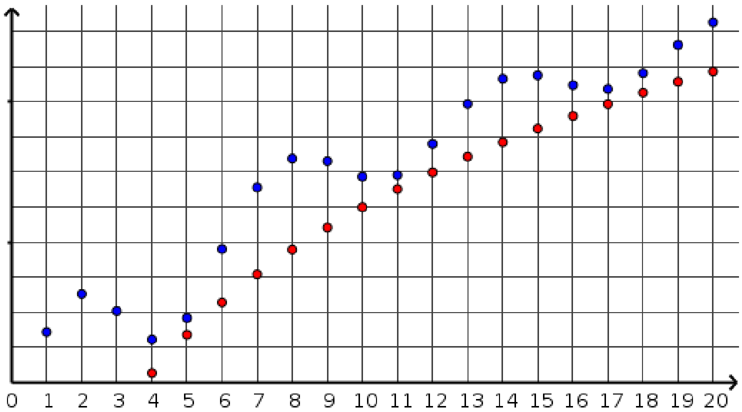
Théorème de comparaison :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n\leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

Illustration : (u_n) en rouge

(v_n) en bleu



Exercice 8 :

Démontrer que

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4\times(-1)^n+3n=+\infty$

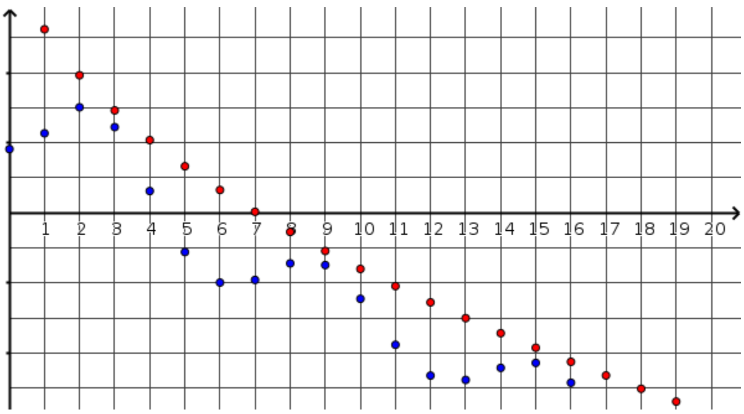
Théorème analogue :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n\leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

Illustration : (u_n) en bleu

(v_n) en rouge



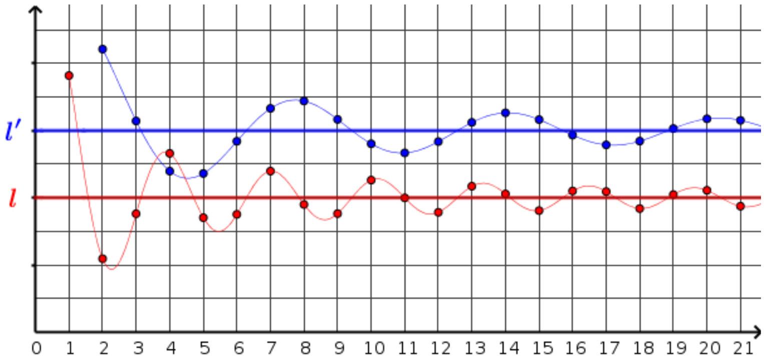
Exercice 9 :

Démontrer que

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2\cos(n)-3n^2+5n=-\infty$

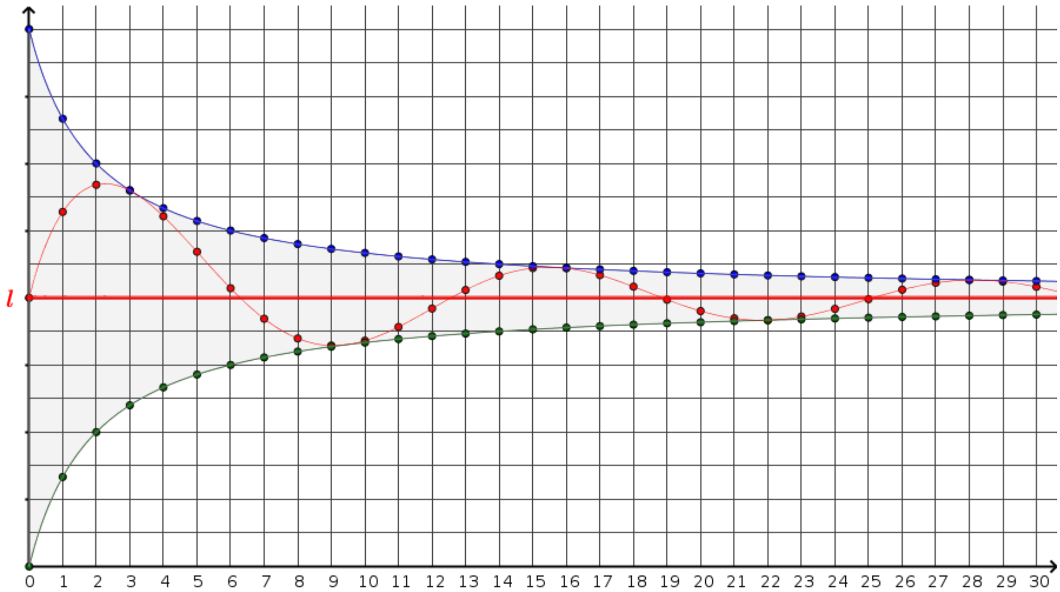
Propriété :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
Notons $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l'$ alors $l \leqslant l'$.

Illustration : (u_n) en rouge
(v_n) en bleu



Théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes) :
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et, (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$, alors la suite (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Illustration :
(u_n) en vert
(v_n) en rouge
(w_n) en bleu



Exercice 10 : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{\sin(3n)}{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.