Variables aléatoires continues

I Approche

Dans de nombreux cas, les valeurs prises par une variable aléatoire ne sont pas dénombrables.
Ces valeurs peuvent être réparties de manière continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On parle alors de variable aléatoire continue.

Exemples :

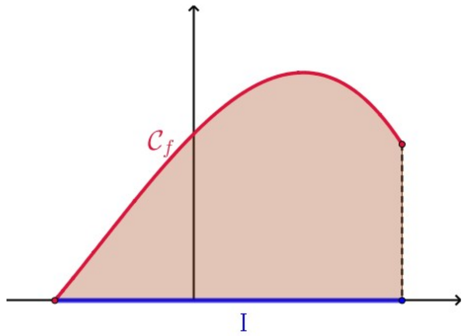
- La variable aléatoire qui donne le temps d'attente à un standard téléphonique.
- La variable aléatoire qui donne la distance d'un centre de secours.
- La variable aléatoire qui donne le poids d'un nouveau né.

Dans ces cas, la probabilité n'est plus ponctuelle mais diffuse à l'intérieur de l'intervalle I.

Dans certains cas, il est même possible caractériser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire à l'aide d'une fonction de densité.

II Densité sur un intervalle I

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
f est une densité de probabilité si l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$, sur l'intervalle I, est égale à 1 ua.



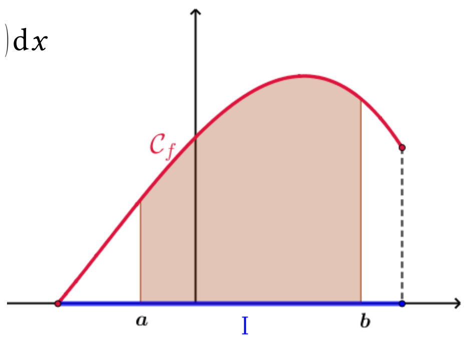
Autrement dit : Lorsque $\mathrm{I}=[a;b]$,
f est une densité de probabilité si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

Exercice 1 : Représenter les fonctions suivantes puis vérifier qu'elles définissent bien, sur l'intervalle indiqué, des fonctions de densité de probabilité.

a) $f(x)=\dfrac{2x-4}{9}$ sur $[2;5]$ b) $g(x)=\dfrac{1}{2}$ sur $[0;2]$ c) $h(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\in[-1;0[\\ -x+1 & \text{si } x\in[0;1] \end{cases}$ sur $[-1;1]$

Définition : Soit X une variable aléatoire à valeur dans un intervalle I et f une densité de probabilité sur I. La loi de probabilité de X a pour densité f si, pour tout intervalle $[a,b]\subset \mathrm{I}$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\in[a;b])=\mathrm{P}(a\leqslant \mathrm{X}\leqslant b)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Propriétés : Pour tous réels a et b de l'intervalle I, $a<b$:

- $\mathrm{P}(\mathrm{X}=a)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=b)=0$
- $\mathrm{P}(\mathrm{X}>a)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant a)$
- $\mathrm{P}(a<\mathrm{X}<b)=\mathrm{P}(\mathrm{X}<b)-\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant a)$

Remarque : Pour une variable aléatoire continue, l'utilisation d'inégalités larges ou strictes est indifférent. On a donc $\mathrm{P}(a\leqslant \mathrm{X}\leqslant b)=\mathrm{P}(a<\mathrm{X}\leqslant b)=\mathrm{P}(a\leqslant \mathrm{X}<b)=\mathrm{P}(a<\mathrm{X}<b)$.

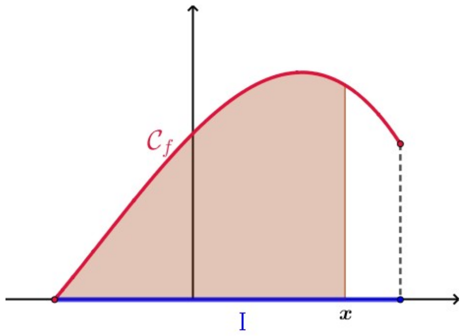
Exercice 2 : Dans chaque cas, la loi de la variable aléatoire X a la densité citée dans l'exercice 1.

a) Calculer $\mathrm{P}(2<\mathrm{X}\leqslant 4)$. b) Calculer $\mathrm{P}(1\leqslant \mathrm{X}<2)$ c) Calculer $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2}<\mathrm{X}<\dfrac{1}{2}\right)$

III Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue à valeur dans un intervalle I.

Définition : La fonction de répartition de X est la fonction définie pour tout $x \in \mathrm{I}$ par $\mathrm{F}(x)=\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x)$



.

Exercice 3 : Déterminer la fonction de répartition de X pour chaque cas de l'exercice 1.

Propriété : Pour tous réels a et b de l'intervalle I, $a<b$, on a $\mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b)=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

IV Espérance et variance d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue à valeur dans un intervalle $[a;b]$ de loi de probabilité de densité f.

Définitions :

- L'espérance de la variable X est donnée par $\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X})=\int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}x}$.
- La variance de la variable X est donnée par $\boxed{\mathrm{V}(\mathrm{X})=\int_a^b (x-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 f(x)\,\mathrm{d}x}$.

Propriété (formule de Koenig-Huygens) :

- La variance de la variable X s'obtient aussi par $\boxed{\mathrm{V}(\mathrm{X})=\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x-(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2}$.

Remarque 1 : Rapprocher ces formules de celles d'une variable aléatoire discrète

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X})=\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} (x_\mathrm{i}-\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 p_\mathrm{i} \text{ ou } \mathrm{V}(\mathrm{X})=\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_\mathrm{i}^{\,2} p_\mathrm{i}-(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2$$

Remarque 1 : L'écart-type de la variable X est alors $\boxed{\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})}}$.

Exercice 4 : À l'aide de la calculatrice, déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X dans chacun des cas de l'exercice 1.