Probabilités

I Probabilités sur un univers fini

Une expérience est dite aléatoire lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.

L'univers est l'ensemble des issues de l'expérience aléatoire. On le note Ω (Oméga).

On a donc $\Omega=\{x_1;x_2;...;x_n\}$

> Exemple : On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on lit le numéro marqué sur la face supérieure.
> L'univers correspondant à cette expérience aléatoire est...

Définir une loi de probabilité sur l'ensemble Ω, c'est associer à chaque issue x_i un nombre positif ou nul p_i. La somme $p_1+p_2+\ldots+p_n$ doit être égale à 1.

Ce nombre p_i est appelé la probabilité de l'issue x_i et il est égal à la "part de chance" qu'a l'issue x_i d'être réalisée. On a donc :

issue	x_1	x_2	...	x_n	Total
probabilité	p_1	p_2	...	p_n	

> Exercice 1 : On tire au hasard une boule d'un sac qui contient trois boules rouges, deux boules noires et quatre boules vertes puis on note la couleur de la boule tirée.
> a) Définir l'univers de cette expérience.
> b) Dresser le tableau de la loi de probabilité de cette expérience.

Lorsque chacune des n issues d'une expérience aléatoire a la même probabilité alors les issues sont équiprobables et la loi de probabilité est dite équirépartie.

On est alors dans une situation d'équiprobabilité et $p_1=p_2=\ldots=p_n=\ldots$

> Exemple : On lance un dé cubique équilibré (honnête), la probabilité d'obtenir chacun des numéros marqués sur les faces est égale à ...

II Modélisation d'une expérience aléatoire

Propriété de la loi des grands nombres :

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois, de façon indépendante, une même expérience aléatoire, la fréquence f d'une issue a tendance à se stabiliser autour d'une valeur qui représente la probabilité de cette issue.

> Exemple : On a lancé 10 000 fois un dé cubique truqué (en vrai ou, avec un tableur ou un programme) et on a obtenu les fréquences ci-dessous arrondies au millième.

issue	1	2	3	4	5	6
fréquence	0,125	0,125	0,125	0,125	0,2	0,3

On décide alors que ce dé suit la loi de probabilité suivante :

issue	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

III Probabilité d'un événement

Définitions : Un événement E est une partie de l'univers. On dit que E est inclus dans Ω. $E \subset \Omega$

La probabilité d'un événement E, notée $P(E)$ est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Exemple : On lance le dé cubique truqué du II, A est l'événement "Obtenir un chiffre pair" et B est l'événement "Obtenir un chiffre multiple de 3"

A est réalisé pour 2 ; 4 et 6 donc on note A={2 ; 4 ; 6} et

$$P(A)=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{10}=\frac{22}{40}=\frac{11}{20}$$

B est réalisé pour ... donc on note B={ ... } et

$P(B)=\ldots$

Propriétés : Pour tout événement $E \subset \Omega$, $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$, $P(\varnothing)=0$ et $P(\Omega)=1$

Définitions : Un événement est impossible lorsqu'aucune issue ne le réalise. Sa probabilité est 0.

Un événement est certain quand toute issue le réalisent. Sa probabilité est 1.

Exercice 2 : On lance le dé cubique truqué du II.
Définir un événement impossible C et un événement certain D.

Propriété : Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement E est

$$P(E)=\frac{nombre\ \ d'issues\ \ réalisant\ \ E}{nombre\ \ d'issues\ \ possibles}$$

Exercice 3 : On lance le dé cubique équilibré, A est l'événement "Obtenir un chiffre pair".
Calculer $P(A)$.

IV Opérations sur les événements

Soit A et B deux événements inclus dans l'univers Ω.

Définitions :

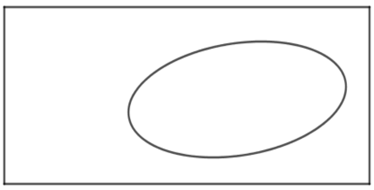
L'événement $\overline{A}$ est l'événement contraire de A. C'est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A.

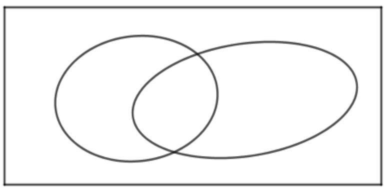
L'événement $A \cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A et B. (les deux à la fois)

L'événement $A \cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent A ou B. (au moins l'un des deux)

A et B sont incompatibles si aucune issue ne les réalise simultanément. Autrement dit $A \cap B = \varnothing$

Illustrations (Diagrammes de Venn) :





Propriétés : $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$ et $\boxed{P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)}$

Exercice 4 : On lance le dé cubique truqué du II. A est l'événement "Obtenir un chiffre pair" et B est l'événement "Obtenir un chiffre strictement supérieur à 4".
a) Définir $\overline{B}$, $A \cap B$ et $A \cup B$
b) Calculer $P(\overline{B})$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$

