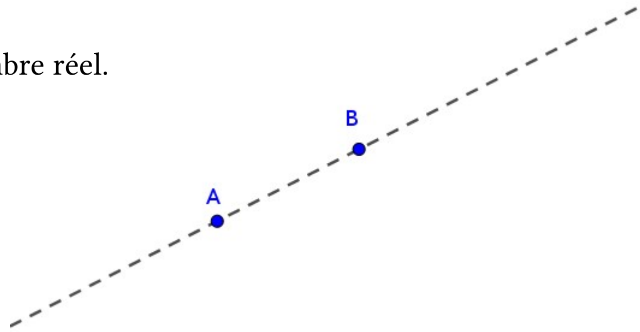
Vecteurs colinéaires

I Produit d'un vecteur par un réel

<u>Définition</u> : Soit A et B deux points distincts et k un nombre réel.

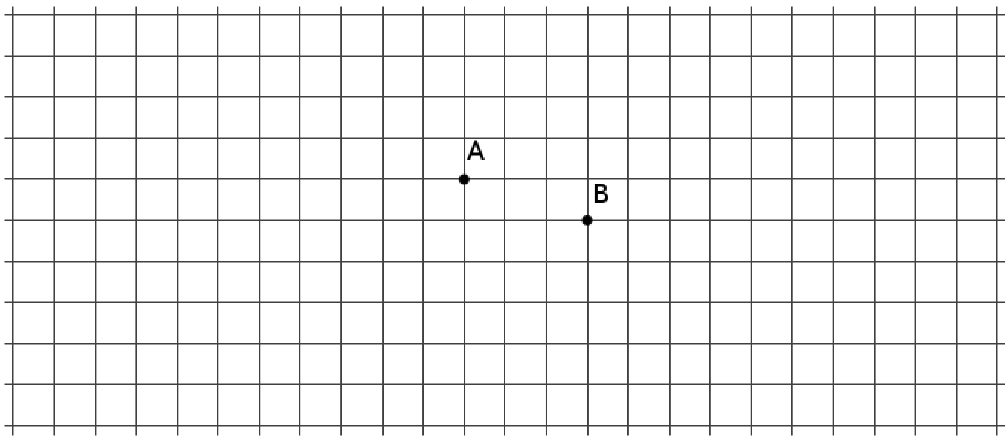
Le point M tel que $\overrightarrow{AM}=k\,\overrightarrow{AB}$ est donné par :

- Si $0<k$ alors $M\in[AB]$ et $AM=k\times AB$
- Si $k<0$ alors $M\in[BA)$, $M\notin[AB]$ et $AM=(-k)\times AB$
- Si $k=0$ alors M=A



<u>Remarque</u> : Si $k\neq 0$, le point M est l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport k.

<u>Exercice 1</u> : Construire M_1, M_2, M_3 tels que $\overrightarrow{AM_1}=3\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM_2}=-2\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_3}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.



<u>Propriété</u> : Dans un repère $(O;I;J)$, soit un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et k un nombre réel, alors les coordonnées du vecteur $k\,\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

<u>Exercice 2</u> : Sur la figure de l'exercice 1,

1) Choisir un repère $(O;I;J)$ puis écrire les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

2) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{AM_2}$ et $\overrightarrow{AM_3}$ puis contrôler sur la figure.

<u>Propriété</u> : Un point M est le milieu du segment [AB] si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

<u>Exercice 3</u> : Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et M le milieu de [AB].

Retrouver, à l'aide de la propriété précédente, le calcul des coordonnées de M.

<u>Propriété (Règles de calcul)</u> : Soit k et k' deux nombres réels et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs alors,

$$(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u} \qquad k(k'\vec{u})=(k\times k')\vec{u} \qquad k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$$

<u>Exemples</u> : $3(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})=$

$5\vec{u}-3\vec{u}=$

<u>Exercice 4</u> : Sur la figure de l'exercice 1,

1) Représenter $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ alors $(O;\vec{i};\vec{j})$ est aussi un repère du plan.

2) Écrire $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{AM_2}$ et $\overrightarrow{AM_3}$ comme combinaison de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$.

II Colinéarité

Définition : Deux vecteurs sont dits colinéaires lorsque l'un est le produit de l'autre par un réel.

Exemple : $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-9\\15\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

En effet, on peut remarquer que $\begin{cases}-9=6\times\dots\\15=-10\times\dots\end{cases}$ donc $\vec{v}=\dots\ \vec{u}$

Remarques :

- Le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.
- Deux vecteurs colinéaires non nuls ont la même direction mais les sens et les longueurs peuvent être différents.

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.

Définition : Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre $xy'-x'y$. on note $\boxed{dét(\vec{u};\vec{v})=xy'-x'y}$.

Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow dét(\vec{u};\vec{v})=0}$$

Exercice 5 : 1) $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-0{,}3\end{pmatrix}$ et $\vec{p}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}2-\sqrt{7}\\3\end{pmatrix}$et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2+\sqrt{7}\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

III Parallélisme et alignement

Propriété : Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

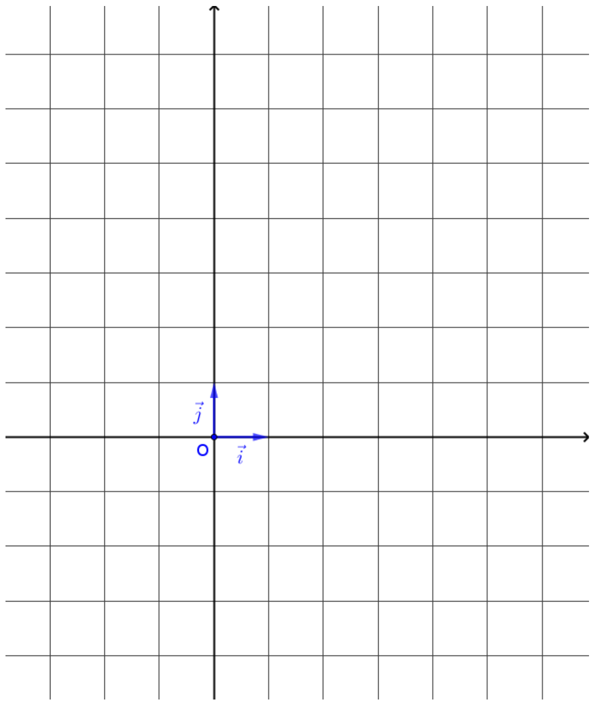
Exercice 6 : Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-contre,

1) Placer $A(-2;3)$, $B(1;7)$, $C(0;-4)$ et $D(6;4)$.

2) Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles

3) Montrer que (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

4) En déduire la nature du quadrilatère ABDC.



Corollaire : Trois points A, B et M sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Exercice 7 : En reprenant les points précédents, montrer que $E(-3;6{,}5)\in(AC)$.

