Étude d'une aire variable

Soit f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f entre $x=a$ et $x=b$.

Partie A : En prenant une fonction constante : $f(x)=5$

1) Représenter f à l'aide du quadrillage.
2) Pour $x \geqslant 0$, hachurer le domaine dont l'aire est $\mathrm{S}(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
3) A l'aide de la formule donnant l'aire d'un rectangle, exprimer $\mathrm{S}(x)$ en fonction de x.
4) Calculer la dérivée de la fonction S.

Partie B : En prenant une fonction affine : $f(x)=\frac{1}{2}x+3$

1) Représenter f à l'aide du quadrillage.
2) Pour $x \geqslant 0$, hachurer le domaine dont l'aire est $\mathrm{S}(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
3) A l'aide de la formule donnant l'aire d'un trapèze, exprimer $\mathrm{S}(x)$ en fonction de x.
4) Calculer la dérivée de la fonction S.

Partie C : En prenant une fonction f continue, positive et croissante : $f(x)=x^2$

1) Représenter f à l'aide du quadrillage sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2) Pour $a \geqslant 0$, hachurer le domaine dont l'aire est $\mathrm{S}(a)=\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
3) a) Pour $h>0$, hachurer le domaine dont l'aire est $\mathrm{S}(a+h)=\int_0^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   b) En déduire un encadrement de $\mathrm{S}(a+h)-\mathrm{S}(a)$ puis de $\frac{\mathrm{S}(a+h)-\mathrm{S}(a)}{h}$.

   c) Que peut-on en déduire lorsque h tend vers 0 ?
4) Pour $h<0$, tel que $a+h \geqslant 0$ hachurer le domaine dont l'aire est $\mathrm{S}(a+h)=\int_0^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ et reprendre les questions 3b) et 3c).
5) En déduire que S est dérivable sur $[0;+\infty[$ et indiquer sa dérivée.
6) Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{3}x^3$

   a) Calculer la dérivée de $\mathrm{S}-\mathrm{F}$ sur $[0;+\infty[$. Qu'en déduit-on ?

   b) Calculer $\mathrm{S}(0)-\mathrm{F}(0)$. En déduite $\mathrm{S}(x)$.
7) Calculer $\mathrm{S}(1)$. À quoi correspond ce résultat ?

Partie D : Une conjecture pour toute autre fonction positive.

A l'aide de la calculatrice :

1) Dans le menu fonction, saisir $f(x)=2x^3+1$.

   En deuxième fonction, saisir $g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   En troisième fonction, saisir $h(x)=g'(x)$.

   Observer les valeurs des trois fonctions de 0 à 10 avec un pas de 0,5.

   Avec TI
   - → en Y_1 saisir $2\mathrm{X}^3+1$ et contrôler qu'elle est positive dans **graphe**.
   - → en Y_2 saisir $\text{intégrFonct}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{X},0,\mathrm{X})$ <u>ou</u> $\int_0^{\mathrm{X}} \mathrm{Y}_1\,\mathrm{dX}$,
   - → en Y_3 saisir $\text{nbreDérivé}(\mathrm{Y}_2,\mathrm{X},\mathrm{X})$ <u>ou</u> $\frac{d}{dX}(\mathrm{Y}_2)|_{\mathrm{X}=\mathrm{X}}$,
   - → régler les paramètres de la table : début 0 et pas de 0,5
   - → afficher la table

   Avec Numworks
   - → $f(x)=2x^3+1$
   - → $g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
   - → $h(x)=\mathit{diff}(g(t),t,x)$
   - → Tableau
   - → Régler l'intervalle : X début 0, X fin 10, Pas 0.5

2) Modifier f en prenant une autre fonction positive.

   Par exemple : $f(x)=\mathrm{e}^x$ ou $f(x)=\sqrt{x}$ ou $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ ou $f(x)=\frac{1}{x+1}$.