

Produits et quotients nuls

I Expressions produit

Définition : Une expression est un produit lorsqu'il n'y a ni addition, ni soustraction en dehors des parenthèses indispensables. Dans ce cas, on dit que l'expression est **factorisée**.

Exercice 1 : Entourer les expressions factorisées

$$A(x) = 3x^2 - 5x \quad B(x) = (3x - 5)^2 - 81 \quad C(x) = 6x(2x - 5)(3x + 8) \quad D(x) = (9x^2 - 24x + 16)$$

$$E(x) = (3x - 2)(5 - 4x) + 2x(3x - 2) \quad F(x) = (3x - 7)^2 - (8 + 5x)^2$$

Remarque : Lorsqu'une expression n'est pas factorisée, elle n'est pas forcément développée.

Exercice 2 : Quelles expressions de l'exercice 1 peuvent être développées ? Les développer.

Lorsqu'une expression n'est pas un produit, il est parfois possible de la factoriser à l'aide de l'une des méthodes suivantes.

Propriétés : Les factorisations à connaître

➤ distributivité $ka + kb = k(a + b)$

➤ égalités remarquables $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exercice 3 : Factoriser les expressions de l'exercice 1.

Remarque : Certaines expressions ne peuvent pas être factorisées. C'est le cas de $G(x) = x^2 - x + 1$.

II Équations produit nul

Définition : Une **équation produit nul** est une équation dans laquelle l'un des membres est une expression factorisée et l'autre membre est zéro.

Propriété : Un produit de facteur est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Conséquence : Résoudre une équation produit nul revient donc à rechercher les valeurs annulant l'un des facteurs du membre factorisé.

Exercice 4 : Résoudre l'équation produit nul $C(x) = 0$.

Remarque : Beaucoup d'équations ne sont pas sous la forme d'un produit nul. On cherche alors à s'y ramener en annulant un membre puis en factorisant.

Exercice 5 :

a) Montrer que résoudre l'équation $(3x - 5)^2 = 81$ revient à résoudre $B(x) = 0$.
Calculer alors les solutions de cette équation.

b) Montrer que résoudre l'équation $(3x - 2)(4x - 5) = 2x(3x - 2)$ revient à résoudre $E(x) = 0$.
Calculer alors les solutions de cette équation.

c) Montrer que résoudre l'équation $(3x - 7)^2 = (8 + 5x)^2$ revient à résoudre $F(x) = 0$.
Calculer alors les solutions de cette équation.

III Équations quotient nul

Définition : Une **équation quotient nul** est une équation dans laquelle l'un des membres est une expression quotient et l'autre membre est zéro.

Propriété : un quotient est nul si, et seulement si, son numérateur est nul.

Exercice 6 : Soit l'expression quotient $H(x) = \frac{3x - 5}{x - 4}$.

a) Pour quelles valeurs de x l'expression $H(x)$ est-elle définie ?

b) Résoudre l'équation $H(x) = 0$.

c) Montrer que résoudre l'équation $\frac{5x - 13}{x - 4} = 2$ revient à résoudre $H(x) = 0$.