Loi de probabilité sans mémoire

Au 1er juillet 2020, un nouveau théâtre dispose d'un grand nombre de dispositifs d'éclairage nécessitant, en tout, l'utilisation de 10 000 ampoules.

Un an après, le 1er juillet 2021, l'éclairagiste a remarqué que le nombre d'ampoules en état de fonctionnement diminuait de 1% chaque mois.

On choisit au hasard une ampoule et on note T la variable aléatoire qui associe à chaque ampoule sa durée de vie, en mois. On considère que la probabilité qu'une ampoule ait une durée de vie de n mois ou plus, est égale à la proportion d'ampoules restantes après n mois.

1) Quelle est la probabilité que l'ampoule ait une durée de vie :

   a) supérieure ou égale à 1 mois ?

   b) supérieure ou égale à 2 mois ?

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant n) = 0{,}99^n$.

3) On admet que, pour tout réel positif x, $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant x) = \mathrm{e}^{x \ln 0{,}99}$.
   Quelle est la probabilité que l'ampoule dure :

   a) plus de trois mois et demi ?

   b) moins de huit mois et demi ?

4) Une ampoule est en état de fonctionnement le 15 mars 2021.

   a) Quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au 1er juillet 2021 ?
      On notera cette probabilité $\mathrm{P}_{\mathrm{T} \geqslant 8{,}5}(\mathrm{T} \geqslant 12)$.

   b) Comparer avec $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant 3{,}5)$.

5) Démontrer que, quels que soient les réels positifs t et h, $\mathrm{P}_{\mathrm{T} \geqslant t}(\mathrm{T} \geqslant t + h) = \mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant h)$.

Remarque : On dit alors que la variable aléatoire T suit <u>une loi de probabilité sans mémoire</u> car la probabilité qu'une ampoule dure un temps h, supplémentaire, après avoir déjà duré un certain temps t, ne dépend justement pas de ce temps t déjà écoulé.

On peut démontrer que les lois de probabilité sans mémoire sont <u>les lois exponentielles</u>.