Vecteur directeur d'une droite

$(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé.

Soit d la droite passant par les points $A(-1;4)$, $B(7;6)$, $C(-5;3)$ et $D(11;7)$.

E et F sont les points de coordonnées respectives $(3;1)$ et $(7;2)$ qui n'appartiennent pas à d.

Soit aussi deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

1) Faire une figure à l'aide du quadrillage d'une feuille.
   a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$.
   b) Calculer les déterminants[1] de ces vecteurs pris deux par deux. Que constate-t-on ?
   c) Ces vecteurs sont appelés vecteurs directeurs de d.
      Proposer deux autres vecteurs directeurs de d et le justifier.
   d) Déterminer lequel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de d.
2) Placer le point G intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées.
   a) Calculer la valeur du réel m tel que que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ soit un vecteur directeur de d.
   b) En déduire, en justifiant, les coordonnées du point G.
3) On considère sur la droite d un point M quelconque de coordonnées $(x;y)$.
   a) Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ en fonction de x et de y.
      Pourquoi ce déterminant est-il nul ?
   b) En déduire que le point M vérifie la relation $x-4y+17=0$.
      Cette relation est appelée équation cartésienne de la droite d.
   c) En prenant le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AC}$, établir une seconde équation cartésienne de la droite d.

Vecteur directeur et équation de droite

Soit a, b et c trois nombres réels.

On veut démontrer la proposition suivante : Si une droite d a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Dans un repère orthonormé, on considère donc une droite d d'équation $ax+by+c=0$, deux points $P(x_p;y_p)$ et $M(x_M;y_M)$ appartenant à d et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

1) Pourquoi peut-on affirmer que $ax_M+by_M+c=0$?
2) Quelle relation peut-on établir entre les coordonnées du point P ?
3) En déduire la relation $a(x_M-x_P)+b(y_M-y_P)=0$.
4) Traduire cette relation en termes de déterminant de deux vecteurs et conclure.

1 Le déterminant de deux vecteurs a été étudié dans le cours "Vecteurs colinéaires"