

Équations de droites

Dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

I Vecteur directeur d'une droite

Définition : Soit une droite d et deux points A et B distincts appartenant à d .

Un **vecteur directeur** de d est un vecteur non nul colinéaire à \overrightarrow{AB} .

Exercice 1 : On considère les points A(3;3) et B(5;4) ainsi que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Faire une représentation à l'aide du quadrillage d'une feuille.
- 2) Montrer que \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).

II Équation Cartésienne d'une droite

Propriété : L'ensemble des points $M(x;y)$ appartenant à une droite d vérifie une relation de la forme $ax+by+c=0$ où a , b et c sont des nombres réels tels que a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Démonstration 1

Réciproquement : Pour tous nombres réels a , b et c tels que a et b ne sont pas tous les deux nuls, l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Démonstration 2

Définition : La relation $ax+by+c=0$ s'appelle une **équation cartésienne** de la droite d .

Exercice 2 : On considère les points C(2;-1), D(-3;2) et E(1;5) ainsi que la droite Δ d'équation $2x-3y-7=0$.

- 1) Montrer que $C \in \Delta$ puis représenter Δ .
- 2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (DE).

Cas particuliers : Soit d la droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

- Si $a=0$ alors la droite d est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}$ et d est parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $b=0$ alors la droite d est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ et est parallèle à l'axe des ordonnées.

III Équation réduite d'une droite

Propriété : Toute droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y=mx+p$ où m et p sont des nombres réels.

Démonstration 3

Définitions : ➤ $y=mx+p$ est l'**équation réduite** de la droite d .

- m est le **coefficient directeur** de la droite d .
- p l'**ordonnée à l'origine** de la droite d .

Remarque : La droite d est alors la représentation graphique de la fonction affine $f(x)=mx+p$.

Exercice 3 : Déterminer l'équation réduite de la droite (DE) avec D(-3;2) et E(1;5).

Propriété : Toute droite d parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x=k$ où k est un nombre réel.

Démonstration 4

Exercice 4 : Déterminer l'équation réduite de la droite passant par $C(2;-1)$ et dirigée par \vec{j} .

IV Coefficient directeur d'une droite

Propriété : Une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées et d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ possède un vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ où $m=-\frac{a}{b}$.

Démonstration 5

Exercice 5 : Déterminer le coefficient directeur la droite Δ d'équation $2x-3y-7=0$.

Propriété : Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ tels que $x_A \neq x_B$.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Démonstration 6

Exercice 6 : Déterminer le coefficient directeur la droite (CD) avec $C(2;-1)$ et $D(-3;2)$.

V Positions relatives de deux droites

Propriété : Soit deux droites d et d' d'équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.
 d et d' sont parallèles si, et seulement si, $ab'-a'b=0$.

Démonstration 7

Exercice 7: On considère les points $D(-3;2)$ et $E(1;5)$ ainsi que la droite Δ d'équation $2x-3y+7=0$. Montrer que les droites (DE) et Δ sont sécantes.

Corollaire : Soit deux droites d et d' non parallèles à l'axe des ordonnées.

d et d' sont parallèles si, et seulement si, leurs coefficients directeurs sont égaux.

Démonstration 8

Propriété : Lorsque deux droites d et d' d'équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont sécantes, les coordonnées du point d'intersection est l'unique solution du système :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

Démonstration 9

Exercice 8: Soit les points $D(-3;2)$ et $E(1;5)$ ainsi que la droite Δ d'équation $2x-3y-7=0$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (DE) et Δ .

Exercice 9: On considère les points $A(3;3)$, $B(5;4)$, $D(-3;2)$ et $E(1;5)$.

- 1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
- 2) Montrer que les droites (AB) et (DE) sont sécantes.
- 3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (DE) et (AB).