

# Équations de droites

Dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## I Vecteur directeur d'une droite

Définition : Soit une droite  $d$  et deux points A et B distincts appartenant à  $d$ .

Un **vecteur directeur** de  $d$  est un vecteur non nul colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$ .

Exercice 1 : On considère les points A(3;3) et B(5;4) ainsi que les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- 1) Faire une représentation à l'aide du quadrillage d'une feuille.
- 2) Montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).

## II Équation Cartésienne d'une droite

Propriété : L'ensemble des points  $M(x;y)$  appartenant à une droite  $d$  vérifie une relation de la forme  $ax+by+c=0$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des nombres réels tels que  $a$  et  $b$  ne sont pas tous les deux nuls.

### Démonstration 1

Réciproquement : Pour tous nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $a$  et  $b$  ne sont pas tous les deux nuls, l'ensemble des points  $M(x;y)$  vérifiant  $ax+by+c=0$  est une droite de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

### Démonstration 2

Définition : La relation  $ax+by+c=0$  s'appelle une **équation cartésienne** de la droite  $d$ .

Exercice 2 : On considère les points C(2;-1), D(-3;2) et E(1;5) ainsi que la droite  $\Delta$  d'équation  $2x-3y-7=0$ .

- 1) Montrer que  $C \in \Delta$  puis représenter  $\Delta$ .
- 2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (DE).

Cas particuliers : Soit  $d$  la droite d'équation cartésienne  $ax+by+c=0$ .

- Si  $a=0$  alors la droite  $d$  est dirigée par  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $d$  est parallèle à l'axe des abscisses.
- Si  $b=0$  alors la droite  $d$  est dirigée par  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$  et est parallèle à l'axe des ordonnées.

## III Équation réduite d'une droite

Propriété : Toute droite  $d$  non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme  $y=mx+p$  où  $m$  et  $p$  sont des nombres réels.

### Démonstration 3

Définitions : ➤  $y=mx+p$  est l'**équation réduite** de la droite  $d$ .

- $m$  est le **coefficient directeur** de la droite  $d$ .
- $p$  l'**ordonnée à l'origine** de la droite  $d$ .

Remarque : La droite  $d$  est alors la représentation graphique de la fonction affine  $f(x)=mx+p$ .

Exercice 3 : Déterminer l'équation réduite de la droite (DE) avec D(-3;2) et E(1;5).

Propriété : Toute droite  $d$  parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme  $x=k$  où  $k$  est un nombre réel.

#### Démonstration 4

Exercice 4 : Déterminer l'équation réduite de la droite passant par  $C(2;-1)$  et dirigée par  $\vec{j}$ .

### **IV Coefficient directeur d'une droite**

Propriété : Une droite  $d$  non parallèle à l'axe des ordonnées et d'équation cartésienne  $ax+by+c=0$  possède un vecteur directeur de coordonnées  $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$  où  $m=-\frac{a}{b}$ .

#### Démonstration 5

Exercice 5 : Déterminer le coefficient directeur la droite  $\Delta$  d'équation  $2x-3y-7=0$ .

Propriété : Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  tels que  $x_A \neq x_B$ .

Le coefficient directeur de la droite (AB) est  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

#### Démonstration 6

Exercice 6 : Déterminer le coefficient directeur la droite (CD) avec  $C(2;-1)$  et  $D(-3;2)$ .

### **V Positions relatives de deux droites**

Propriété : Soit deux droites  $d$  et  $d'$  d'équations cartésiennes  $ax+by+c=0$  et  $a'x+b'y+c'=0$ .  
 $d$  et  $d'$  sont parallèles si, et seulement si,  $ab'-a'b=0$ .

#### Démonstration 7

Exercice 7: On considère les points  $D(-3;2)$  et  $E(1;5)$  ainsi que la droite  $\Delta$  d'équation  $2x-3y+7=0$ . Montrer que les droites (DE) et  $\Delta$  sont sécantes.

Corollaire : Soit deux droites  $d$  et  $d'$  non parallèles à l'axe des ordonnées.

$d$  et  $d'$  sont parallèles si, et seulement si, leurs coefficients directeurs sont égaux.

#### Démonstration 8

Propriété : Lorsque deux droites  $d$  et  $d'$  d'équations cartésiennes  $ax+by+c=0$  et  $a'x+b'y+c'=0$  sont sécantes, les coordonnées du point d'intersection est l'unique solution du **système** :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

#### Démonstration 9

Exercice 8: Soit les points  $D(-3;2)$  et  $E(1;5)$  ainsi que la droite  $\Delta$  d'équation  $2x-3y-7=0$ . Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (DE) et  $\Delta$ .

Exercice 9: On considère les points  $A(3;3)$ ,  $B(5;4)$ ,  $D(-3;2)$  et  $E(1;5)$ .

- 1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
- 2) Montrer que les droites (AB) et (DE) sont sécantes.
- 3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (DE) et (AB).