Loi exponentielle

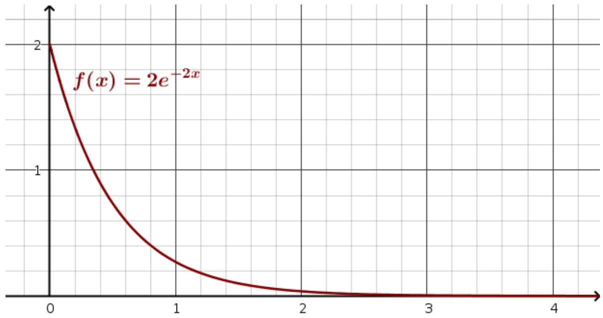
Dans ce chapitre, λ désigne un réel strictement positif.

I Loi exponentielle de paramètre λ

Définition : Une variable aléatoire continue suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est définie sur $[0;+\infty[$ par $\boxed{f(x)=\lambda e^{-\lambda x}}$.

Notation : Lorsque la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Exemple : Représentation graphique de la densité de la loi exponentielle de paramètre 2.



Propriétés : Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

- Pour tous réels a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$, on a :

  $P(a \leqslant X \leqslant b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$ $\qquad P(X \leqslant b)=1-e^{-\lambda b}$ $\qquad P(X \geqslant a)=e^{-\lambda a}$

- La fonction de répartition de X est définie pour tout $x \in [0;+\infty[$ par $\boxed{F(x)=1-e^{-\lambda x}}$.
- L'espérance de X est $\boxed{E(X)=\frac{1}{\lambda}}$

  Démonstration 1

  Exercice : $X \sim \mathcal{E}(2)$. Montrer que $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1)=\frac{e-1}{e^2}$.

II Durée de vie sans vieillissement ou absence de mémoire

Définition : Soit X une variable aléatoire continue à valeurs positives.

La loi de X est une loi de durée de vie sans vieillissement lorsque pour tous réels positifs t et h,

$$\boxed{P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h)=P(X \geqslant h)}.$$

Remarques :

- On parle aussi de loi sans mémoire.
- Cette caractéristique signifie qu'à partir de tout âge, la durée de vie est la même.

Propriété : La loi exponentielle est la loi de durée de vie sans vieillissement.

Démonstration 2

III Application

La durée de vie d'un smartphone avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Les utilisateurs ont signalé une première panne, en moyenne, au bout de 4 ans d'utilisation.

1) Déterminer le paramètre λ de la loi suivie par la durée de vie D de ce smartphone.
2) Quelle est la probabilité qu'il fonctionne 10 ans sans avoir de panne ?
3) Après 3 ans de services, un utilisateur n'a pas eu de panne. Quelle est la probabilité que son appareil fonctionne encore 2 ans sans tomber en panne ?

