Suites

I Définitions

1^{er}	2^{e}	3^{e}	...	n^{e}	$n+1^{e}$
u_0	u_1	u_2	...	u_{n-1}	u_n
u_1	u_2	u_3	...	u_n	u_{n+1}

Rappel : Soit une suite (u_n), le terme d'indice n est noté u_n.
Lorsque le premier terme est u_0 alors u_n est le $n+1$ième terme.
Lorsque le premier terme est u_1 alors u_n est le $n$ième terme.
Définition explicite : $u_n = f(n)$ où f est une fonction.

Exercice 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on donne $a_n = n + (-1)^n$ et $b_n = \dfrac{3}{n+1}$

Calculer les quatre premiers termes et le neuvième terme de chaque suite.

Définition par récurrence : u_0 et une formule pour calculer u_{n+1} à partir de u_n.

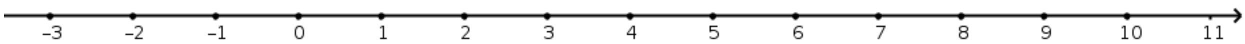
Exercice 2 : $c_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{3}{c_n + 1}$ $\qquad d_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = \sqrt{d_n + 1}$

Calculer les quatre premiers termes et le neuvième terme de chaque suite.

II Représentations graphiques

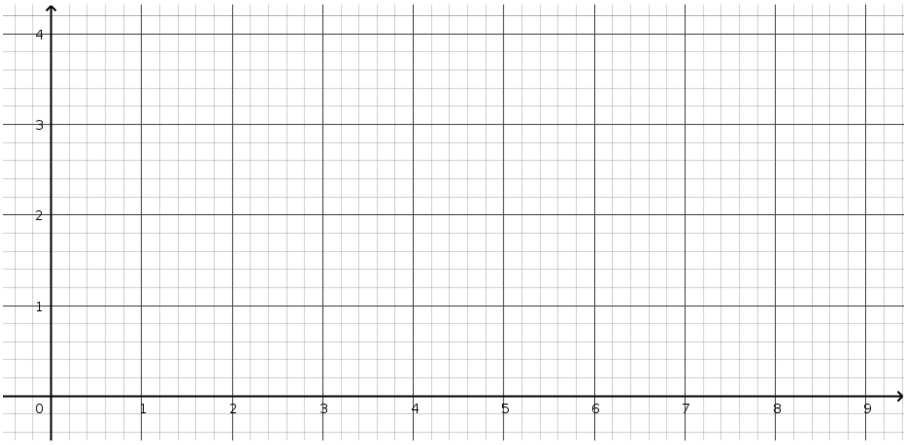
- Sur un axe gradué, on place successivement les points M_n d'abscisse u_n.

Exemple : Représenter sur l'axe ci-dessous la suite (a_n) avec $a_n = n + (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$



- Dans le plan muni d'un repère, on place successivement les points M_n de coordonnées $(n\,;u_n)$.

Exemple : Représenter dans le repère ci-dessous la suite (b_n) avec $b_n = \frac{3}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$



III Mémento calculatrice

Numworks	TI 83 (82)	Casio Graph 90+E (35+E)
Menu Suites A l'aide des flèches : Onglet Suites Ajouter une suite (max 3) Choisir Explicite ou Récurrente Saisir la suite Valeurs Afficher les valeurs Graphique Tracer le graphique	mode **SUITE** puis 2nde quitter $f(x)$ Suite explicite **SUITE(** n**)** Compléter $nMin=0$ et $\mathrm{U}(n)=3/(n+1)$ Suite récurrente Compléter $nMin=0$ $\mathrm{U}(n)=\sqrt{(\mathrm{U}(n-1)+1)}$ $\mathrm{U}(nMin)=8$ Valeurs 2nde table Graphique graphe	MENU 8 Récurrence (RECUR) F3 **TYPE** F1 Explicite et F2 Récurrente Choisir le nom et saisir la suite (Pour les suites récurrentes, le 1^{er} terme est saisi dans F5 **SET** a_0) Valeurs F6 **TABLE (TAB)** Graphique F6 **GPH-PLT**

IV Sens de variation

Définitions :

- Une suite (u_n) est croissante à partir de l'indice n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$
- Une suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$

De même

- (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} > u_n$
- (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} < u_n$

De plus

- Une suite (u_n) est constante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$
- Une suite est monotone si elle est croissante, ou décroissante, à partir du premier terme.

Méthodes : Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on peut suivant les cas :

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

  Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors la suite est croissante

  Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors la suite est décroissante

- Si les termes de la suite sont tous strictement positifs (resp. négatifs), comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à l'unité

  Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors la suite est croissante (resp. décroissante)

  Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors la suite est décroissante (resp. croissante)

- Si (u_n) est définie explicitement par $u_n = f(n)$, étudier les variations de f sur $[n_0 ; +\infty[$

  Si f est monotone alors la suite (u_n) a le même sens de variation que f à partir de n_0

Exercice 3 :

a) Montrer que la suite (a_n) avec $a_n = n + (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ n'est ni croissante, ni décroissante.

b) Montrer que la suite (b_n) avec $b_n = \frac{3}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est strictement monotone.

c) Conjecturer les variations des suites (c_n) avec $\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_{n+1} = \frac{3}{c_n + 1} \end{cases}$ et (d_n) avec $\begin{cases} d_0 = 8 \\ d_{n+1} = \sqrt{d_n + 1} \end{cases}$

V Suites arithmétiques

Définition : Une suite est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

Exercice 4 : La suite (e_n) est arithmétique telle que $e_3 = 1$ et $e_{11} = -23$.

Calculer son premier terme e_0 et sa raison.

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Si $r \geqslant 0$ alors (u_n) est croissante

Si $r \leqslant 0$ alors (u_n) est décroissante

Démonstration 1

Propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

Exercice 5 : Calculer $S_1 = 1 + 2 + \ldots + 39$

En déduire $S_2 = 17 + 18 + 19 + \ldots + 39$ et $S_3 = 5 + 9 + 13 + \ldots + 157$

VI Suites géométriques

Définition : Une suite est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$

Exercice 6 : La suite (i_n) est géométrique telle que $i_4 = 3$ et $i_{11} = 384$.

Calculer son premier terme i_0 et sa raison.

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q alors on a :

	$u_0 > 0$	$u_0 < 0$
q>1	(u_n) est strictement croissante	(u_n) est strictement décroissante
$0 < q < 1$	(u_n) est strictement décroissante	(u_n) est strictement croissante

Démonstration 2

Propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $\boxed{1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

Exercice 7 : Calculer $S_4 = 1 + 2 + 4 + \ldots + 1024$ et en déduire $S_5 = 16 + 32 + 64 + \ldots + 16\,384$

VII Suites arithmético-géométriques

Définition : Une suite est arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = a \times u_n + b}$

Remarques :

- Lorsque $a = 0$ alors $u_{n+1} = b$ et la suite (u_n) est constante.
- Lorsque $a = 1$ alors $u_{n+1} = u_n + b$ et la suite (u_n) est arithmétique de raison b.
- Lorsque $b = 0$ alors $u_{n+1} = a \times u_n$ et la suite (u_n) est géométrique de raison a.

Exercice 8 : La suite (k_n) est définie par $k_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_{n+1} = 21 - 2k_n$.

Calculer les cinq premiers termes de la suite (k_n).

Montrer que la suite (k_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = a u_n + b}$.
Lorsque $a \neq 1$, soit l la solution de l'équation $x = a x + b$.
Alors la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - l$ est géométrique de raison a.

Démonstration 3

Exercice 9 : La suite (k_n) est définie par $k_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_{n+1} = 21 - 2k_n$.

Montrer que la suite (p_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $p_n = k_n - 7$ est géométrique.

Écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de p_n en fonction de n.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de k_n en fonction de n