

**Perspective d'évolution d'un marché et suites croisées.**

On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2021.

Pour chacun d'eux, un entretien annuel doit être réalisé. Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce travail. En 2021, la société A entretient 40 % des ascenseurs. On estime que, chaque année :

- 7 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ;
- 9 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ;
- les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.

On note  $a_n$  la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A pendant l'année  $2021+n$ . De même, on note  $b_n$  la proportion d'ascenseurs entretenus par la société B lors de l'année  $2021+n$ . On a donc  $a_0=0,4$  et  $b_0=0,6$ .

- 1) Calculer  $a_1$  et interpréter le résultat.
- 2) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $a_{n+1}=0,93 a_n+0,09 b_n$ .  
En déduire que  $a_{n+1}=0,84 a_n+0,09$ .
- 3) Déterminer l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ .
- 4) Étudier la monotonie de la suite  $(a_n)$  et en déduire celle de la suite  $(b_n)$ .
- 5) Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$  et l'interpréter avec le contexte.