Fonctions et limites

Activité 1

On étudie les quatre fonctions $f(x)=x^3$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$, $h(x)=\sqrt{x}$ et $k(x)=e^x$.

1) Représenter ces quatre fonctions sur le même écran de la calculatrice et paramétrer la fenêtre pour des abscisses allant de −5 à 5 et des ordonnées allant de −10 à 10.
2) Pour chaque fonction dresser et justifier son tableau de variation.
3) Écrire une équation de la tangente à chacune des courbes en $x=1$.
4) Comportement quand x devient grand.
   a) À l'aide du graphique, conjecturer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} k(x)$.
   b) Déterminer un réel $x>0$ tels que $f(x)>10^3$ puis que $f(x)>10^9$.
   c) Déterminer un réel $x>0$ tels que $g(x)<10^{-2}$ puis que $g(x)<10^{-6}$.
   d) Déterminer un réel $x>0$ tels que $h(x)>10^2$ puis que $h(x)>10^6$.
   e) Déterminer un réel $x>0$ tels que $k(x)>10^3$ puis que $k(x)>10^9$.
5) Comportement quand x devient petit.
   a) À l'aide du graphique, conjecturer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} k(x)$.
   b) Déterminer un réel $x<0$ tels que $f(x)<-10^3$ puis que $f(x)<-10^9$.
   c) Déterminer un réel $x<0$ tels que $g(x)<10^{-2}$ puis que $g(x)<10^{-6}$.
   d) Déterminer un réel $x<0$ tels que $k(x)<10^{-3}$ puis que $k(x)<10^{-9}$.
6) Comportement quand x se rapproche de zéro.
   a) À l'aide du graphique, conjecturer $\lim_{x\to0} g(x)$ et $\lim_{x\to0} h(x)$.
   b) Déterminer un réel $x>0$ tels que $g(x)>10^4$ puis que $g(x)>10^6$.
   c) Déterminer un réel $x<0$ tels que $g(x)>10^4$ puis que $g(x)>10^6$.
   d) Déterminer un réel $x>0$ tels que $h(x)<10^{-2}$ puis que $h(x)<10^{-3}$.

Activité 2

On considère la fonction homographique p définie pour tout $x\neq-1$ par $p(x)=\frac{2x+5}{x+1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction p.
2) Calculer la dérivée p'. En déduire les variations de p et les résumer dans un tableau.
3) A l'aide d'une représentation sur la calculatrice conjecturer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.