Équations dans $\mathbb{C}$

I Équations complexes du premier degré

Les quatre opérations sur $\mathbb{C}$ ont les mêmes propriétés que sur $\mathbb{R}$. La résolution des équations de degré 1 et d'inconnue complexe z va donc être analogue à celle pour des équations d'inconnue réelle.

Exercice 1 : Soit $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 4 + \mathrm{i}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z + z_1 = z_2$ et $z_1 z = z_2$.

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $5 - 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}z = 3z + 4$.

II Équations complexes du premier degré en z et $\overline{z}$

Propriété : Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales.

Autrement dit, lorsque $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$, où a, b, a' et b' sont des réels, $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

En général, pour résoudre des équations complexes faisant intervenir z et $\overline{z}$, on commence par écrire z et $\overline{z}$ sous forme algébrique puis on utilise la propriété précédente pour aboutir à un système de deux équations à deux inconnues.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = 2\mathrm{i}\overline{z} + 5\mathrm{i} - 2$.

III Équations complexes du second degré à coefficients réels

Propriété : Soit l'équation $(\mathcal{E})$: $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue complexe z où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$ et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- si $\Delta > 0$ alors l'équation $(\mathcal{E})$ admet deux solutions réelles distinctes,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\,;$$

- si $\Delta = 0$ alors l'équation $(\mathcal{E})$ admet une unique solution $\quad x_0 = \dfrac{-b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$ alors l'équation $(\mathcal{E})$ admet deux solutions complexes conjuguées,

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration 1

Corollaire : Tout trinôme de degré 2 est factorisable dans $\mathbb{C}$.

Démonstration 2

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 1 = z$.

Exercice 5 : Factoriser le polynôme $P(z) = 4z^2 - 4z + 5$

CC-BY-NC-SA

IV Équations complexes d'ordre supérieur

Définitions : Soit n un entier naturel et $n+1$ nombres complexes notés $c_0, c_1, \ldots, c_n$ avec $c_n \neq 0$.

- Un polynôme de degré n est une expression de la forme $P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ où $z \in \mathbb{C}$.
- Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$ alors a est appelé racine du polynôme P.
- L'équation $P(z) = 0$ d'inconnue complexe z est l'équation polynomiale de degré n associée à P.

Propriété : Soit z et a deux nombres complexes. Pour tout entier naturel n non nul, on a

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} a^k.$$

Remarques :

- Pour $n = 2$ on savait déjà que $z^2 - a^2 = (z-a)(z+a)$.
  La formule précédente généralise donc une égalité remarquable à tous les degrés.
- Pour $n = 2$ on savait aussi que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
  La formule du binôme de Newton permet de développer $(z+a)^n$ et $(z-a)^n$ et généralise donc ces égalités remarquables à tous les degrés.

Démonstration 3

Exercice 6 : Factoriser $z^5 - 32$ puis $z^5 + 32$.

Propriété : Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ et a un nombre complexe. Si $P(a) = 0$ alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a)Q(z)$.

Démonstration 4

Exercice 7 : Soit $P(z) = 3z^3 + 6z^2 + 15z - 78$.

1) Montrer que 2 est une racine de P.
2) En déduire les réels a, b et c tels que $P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c)$.
3) En déduire une factorisation de P en polynômes de degré 1.
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Propriété : Pour tout entier naturel n, un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Démonstration 5

Corollaire : Une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions.

CC-BY-NC-SA