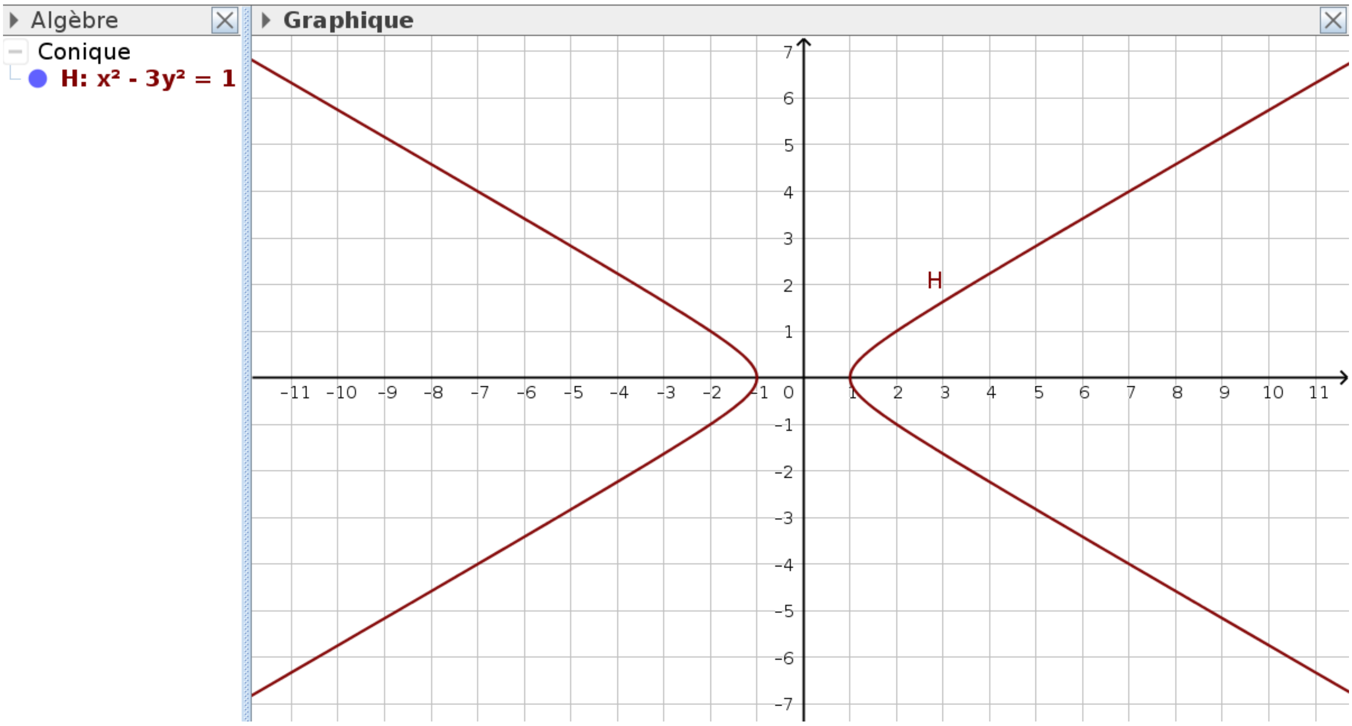
Recherche des points à coordonnées entières d'une hyperbole

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère l'ensemble $\mathscr{H}$ des points $M(x;y)$ du plan tels que $x^2 - 3y^2 = 1$. Cet ensemble est une hyperbole.

On veut connaître le nombre de points à coordonnées entières qui appartiennent à $\mathscr{H}$.



Partie A : Observation

À l'aide du graphique, trouver des points de $\mathscr{H}$ à coordonnées entières.

Justifier qu'il suffit de chercher des points à coordonnées entières et positives pour répondre à cette question.

Partie B : De proche en proche

À tout point $M(x;y)$ on associe le point $M'(x';y')$ tel que $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

1) Soit P_0 le point de coordonnées $(1;0)$. On nomme P_1 le point associé à P_0, puis P_2 le point associé à P_1. De cette manière, pour tout entier naturel n, P_{n+1} est le point associé à P_n.

   Calculer les coordonnées de P_1, P_2 et P_3. Que peut-on remarquer ?

2) Justifier que si M appartient à $\mathscr{H}$ alors M' appartient lui aussi à $\mathscr{H}$.

3) En déduire deux nouveaux point à coordonnées entières positives appartenant à $\mathscr{H}$.

4) Démontrer que si $x > 0$ et $y > 0$ alors $x' > x$ et $y' > y$.

5) En déduire le nombre de points à coordonnées entières qui appartiennent à $\mathscr{H}$.

Partie C : Automatiser les calculs avec l'écriture matricielle

1) **Une nouvelle opération**.

   a) À tout point $M_0(x;y)$, on associe le point $M_1(x_1;y_1)$ tel que $\begin{cases} x_1 = 2x+3y \\ y_1 = x+2y \end{cases}$,

   puis à M_1 on associe le point $M_2(x_2;y_2)$ tel que $\begin{cases} x_2 = 2x_1+3y_1 \\ y_2 = x_1+2y_1 \end{cases}$.

   Exprimer x_2 et y_2 en fonction de x et y.

   b) Écrire le système $\begin{cases} x_1 = 2x+3y \\ y_1 = x+2y \end{cases}$ sous la forme matricielle $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée de taille 2.

   c) De la même manière donner la matrice B telle que $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   d) Expliquez pourquoi $B = A \times A$ que l'on notera $B = A^2$.

2) **De nouveaux points**.

   a) On rappelle que P_0 le point de coordonnées $(1;0)$.

   En reprenant les notations de la partie B, pour tout entier naturel n, $P_{n+1}(x_{n+1};y_{n+1})$ est le point associé à $P_n(x_n;y_n)$ et on a $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

   Justifier que $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis, exprimer $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   b) Calculer A^3, A^4, A^5 et A^6 et en déduire les coordonnées de P_4, P_5 et P_6.

   c) Avec la calculatrice, calculer A^{10} puis les coordonnées de P_{10}.

Partie D : Aspect historique

L'équation $x^2 - 3y^2 = 1$ aux inconnues entières x et y est un cas particulier d'un type d'équations nommées équations de Pell-Fermat.

Ce type d'équations a été étudié de différentes façons depuis l'Antiquité, en Grèce, en Inde et par les mathématiciens arabes. Elles portent le nom de de John Pell (1611-1685) et Pierre de Fermat (1601-1665). Mais la solution générale et définitive ne sera trouvée qu'au XIXe siècle à la suite de travaux de Gauss, Dirichlet, Dedekind et Kummer.

Sa résolution générale passe par l'étude de structures algébriques qui dépassent le cadre du programme de Terminale.