# Étude de systèmes de deux équations à deux inconnues

## 1) Résolution graphique

a) Résoudre graphiquement le système $\mathcal{S}_1 \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array} \right.$.

b) Déterminer graphiquement le nombre de solutions des systèmes suivants :

$\mathcal{S}_2 \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 3 \\ x + y = 0 \end{array} \right.$ $\quad$ $\mathcal{S}_2 \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right.$ $\quad$ $\mathcal{S}_3 \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{array} \right.$

## 2) Cas général

Soient $a$, $b$, $c$, $d$, $\alpha$ et $\beta$ six réels tels que $a$, $b$, $c$ et $d$ ne soient pas tous nuls.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a$, $b$, $c$ et $d$ pour que le système $\mathcal{S} \left\{ \begin{array}{l} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{array} \right.$ admette une unique solution.

On suppose ensuite cette condition réalisée.

b) Écrire le système $\mathcal{S}$ sous la forme $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ où $A$ est une matrice carrée de taille 2.

c) Soit la matrice $B = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Calculer le produit $BA$.

En déduire une expression de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

## 3) Calcul des solutions

a) Donner la solution du système $\mathcal{S}$.

b) Calculer la solution du système $\mathcal{S}_1$ puis du système $\mathcal{S}_2$.

# Aspect historique

Le terme matrice a été introduit par Sylvester en 1851 et c'est en 1855 que Cayley adopte pour la première fois la notion de matrice comme "une notation commode" pour représenter les systèmes linéaires.

Très rapidement, dès 1858, la matrice n'est plus une simple notation commode, mais commence à faire l'objet d'une "théorie" s'articulant autour de l'énoncé de théorèmes.