Matrices

I Généralités

Définition : Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Une matrice de dimension $n \times p$ est un tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes. Les nombres de ce tableau sont appelés les coefficients de la matrice.

Soit A une matrice de dimension $n \times p$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, le coefficient se trouvant à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de la matrice A est noté a_{ij}.

On a donc $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ que l'on note aussi $A = \left(a_{ij}\right)$

Exercice 1 : $M = \begin{pmatrix} 2 & 5,3 & -4 \\ 7 & 6 & -2,4 \\ 1,2 & 3 & 4,5 \\ -9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Donner la dimension de la matrice M et les coefficients m_{32}, m_{21} et m_{13}.

Définitions : Soit M une matrice de dimension $n \times p$.

- Si $n = p$ alors M est une matrice carrée de taille n.
- Si $p = 1$ alors M est une matrice colonne (ou vecteur colonne) de taille n.
- Si $n = 1$ alors M est une matrice ligne (ou vecteur ligne) de taille p.
- Si tous les coefficients de M sont nuls alors M est une matrice nulle.
- Si M est carrée de taille n et que ses coefficients sont nuls sauf, peut-être, les éléments diagonaux $\{a_{11}; a_{22}; \dots; a_{nn}\}$ alors M est une matrice diagonale de taille n.
- Si M est diagonale de taille n avec des coefficients diagonaux tous égaux à 1 alors M est la matrice identité de taille n et on la note I_n.

Exercice 2 : Caractériser les matrices suivantes et donner leur dimension.

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$ $M_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Définition : Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même dimension et que tous les coefficients de mêmes indices égaux.

Exemple : En radian, soit $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,5 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A = B$.

Définition : Une matrice $A = \left(a_{ij}\right)$ carrée de taille n est symétrique lorsque pour tous les entiers $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemple : $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.

II Opérations sur les matrices

1) Addition des matrices

Définition : Soit A et B des matrices de même dimension, la somme de A et B est la matrice, notée $A+B$, dont les coefficients sont obtenus en additionnant les coefficients de mêmes indices des matrices A et B.

Autrement dit, si $A=\left(a_{ij}\right)$ et $B=\left(b_{ij}\right)$ alors $A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$.

Exercice 3 : $M=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$, calculer $M+N$.

2) Multiplication d'une matrice par un réel

Définition : Soit A une matrice et λ un réel, le produit de A par λ est la matrice, notée λA, dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par λ.

Autrement dit, si $A=\left(a_{ij}\right)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda A=\left(\lambda \times a_{ij}\right)$.

Exercice 4 : $M=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, calculer $3M$.

Définition : Soit A une matrice, $-1A$ est notée $-A$ et est appelée matrice opposée de A.

Propriété : Soit A une matrice, $A+(-A)=-A+A=O$ où O est la matrice nulle de même dimension que A.

Définition : Soit A et B des matrices de même dimension, la soustraction des matrices A et B est définie par $A-B=A+(-B)$.

Propriétés : Pour toutes matrices A et B de même dimension et tous réels λ et μ :

- $A+B=B+A$ *l'addition des matrices est commutative*
- $A+(B+C)=(A+B)+C$ *l'addition des matrices est associative*
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ *le produit par un réel est distributif par rapport à l'addition des matrices*
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ *le produit par un réel est distributif par rapport à l'addition des réels*
- $\lambda(\mu A)=(\lambda\times\mu)A$

Exercice 5 : $M=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$, calculer $2M-3N$.

3) Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition : Soit A une matrice ligne de taille n et B une matrice colonne de taille n alors le produit AB est le réel défini par :

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}=a_{11}\times b_{11}+\dots+a_{1i}\times b_{i1}+\dots+a_{1n}\times b_{n1}=\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\times b_{i1}$$

Exercice 6 : $L=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, calculer LC.

4) Produit de deux matrices

Le produit AB de deux matrices A et B n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Soit A une matrice de dimension $n\times p$ et B une matrice de dimension $p\times q$ alors le produit AB est la matrice de dimension $n\times q$ dont le coefficient d'indices ij est le produit de la ligne i de A par la colonne j de B.

Pour $A=(a_{ik})$ et $B=\left(b_{kj}\right)$ alors $AB=\left(c_{ij}\right)$ avec $c_{ij}=a_{i1}\times b_{1j}+\cdots+a_{ik}\times b_{kj}+\cdots+a_{ip}\times b_{pj}=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\times b_{kj}$

<u>Exercice 7</u> : $A=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-2\\-4&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-3&-2\end{pmatrix}$ et $E=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$

Calculer les produits AC, BA, DA, DB, BE et EB.

<u>Propriété</u> : Soit A, B, C trois matrices, sous réserve que les dimensions sont compatibles, on a :

- en général $AB\neq BA$ *le produit des matrices n'est pas commutatif* ;
- soit O une matrice nulle, si $A=O$ ou $B=O$ alors $AB=O$ *mais la réciproque est fausse* ;
- $ABC=(AB)C=A(BC)$ *le produit des matrice est associatif* ;
- $A(B+C)=AB+AC$ et $(B+C)A=BA+CA$ *le produit des matrice est distributif par rapport à l'addition* ;
- soit $k\in\mathbb{R}$, $kAB=(kA)B=A(kB)=k(AB)$;
- soit I une matrice identité, $IA=AI=A$.

III Puissances d'une matrice carrée

<u>Définition</u> : Soit A une matrice carrée d'ordre n et k un entier naturel, $A^k=I_n\underbrace{A\ldots A}_{k\text{ facteurs}}$

<u>Corollaire</u> : $A^0=I_n$, $A^1=A$, $A^2=AA$ et, pour tout entier naturel k, $A^{k+1}=A^kA=AA^k$.

<u>Exercice 8</u> : $M=\begin{pmatrix}3&9&-9\\2&0&0\\3&3&-3\end{pmatrix}$, calculer M^k pour tout $k\in\mathbb{N}$.

<u>Propriété</u> : Soit D une matrice diagonale d'ordre n de coefficients diagonaux $d_{11},\ldots,d_{nn}$.
Pour tout entier naturel k, D^k est la matrice diagonale de coefficients diagonaux ${d_{11}}^k,\ldots,{d_{nn}}^k$.

Autrement dit, $\begin{pmatrix}d_{11}&\ldots&0&\ldots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\ldots&d_{ii}&\ldots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\ldots&0&\ldots&d_{nn}\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}{d_{11}}^k&\ldots&0&\ldots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\ldots&{d_{ii}}^k&\ldots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\ldots&0&\ldots&{d_{nn}}^k\end{pmatrix}$.

<u>Exercice 9</u> : $M=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, calculer M^k pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0\leqslant k\leqslant 4$.

IV Mémento calculatrice

Numworks	TI 83 (82)	Casio Graph 90+E (35+E)
Menu **Calculs** Boîte à outils **Matrices → Nouvelle matrice** Saisir les coefficients de gauche à droite et du haut vers le bas à l'aide des flèches de direction. Nommer la matrice (facultatif) : shift sto→ puis A à Z Opérations : $A+B$, $1.5A$, $A*B$ et A^4	matrice (ou 2nde matrice) Sélectionner le nom puis **éDIT** Saisir la dimension puis les coefficients de gauche à droite et du haut vers le bas à l'aide des flèches de direction. Opérations : matrice (ou 2nde matrice) puis sélectionner et entrer $[A]+[B]$, $1.5[A]$, $[A]*[B]$, $[A]^4$	MENU **1. Exe-Mat** F4 **MATH** F1 **MAT/VCT** Saisir la dimension F1 à F6 Autre méthode : F3 **MAT/VCT** Choisir le nom puis la dimension Saisir les coefficients de gauche à droite et du haut vers le bas à l'aide des flèches de direction. Opérations : SHIFT Mat A $MatA+MatB$, $1.5MatA$, $MatA*MatB$, $MatA^4$

