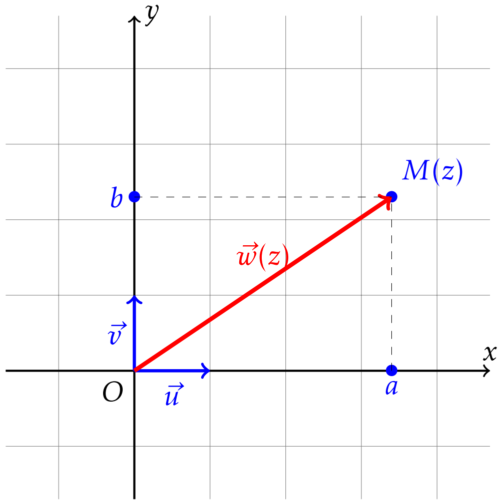
Aspect géométrique des nombres complexes

I Représentation graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.



Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$,

- Le point image de z est le point $M(a;b)$;
- Le vecteur image de z est le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Propriété : À tout point $M(a;b)$ du plan correspond un unique nombre complexe $z = a + ib$.

Définition : z est l' affixe du point M. On note $M(z)$.

Propriété : À tout vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du plan correspond un unique nombre complexe $z = a + ib$.

Définition : z est l' affixe du vecteur $\vec{w}$. On note $\vec{w}(z)$.

Corollaires :

- Soit z_A et z_B des nombres complexes et les points $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors $A = B \Leftrightarrow z_A = z_B$.
- Soit z_1 et z_2 des nombres complexes et les vecteurs $\vec{w_1}(z_1)$ et $\vec{w_2}(z_2)$ alors $\vec{w_1} = \vec{w_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2$.

Définition : Les points et les vecteurs sont repérés par des nombres complexes donc on parle du plan complexe .

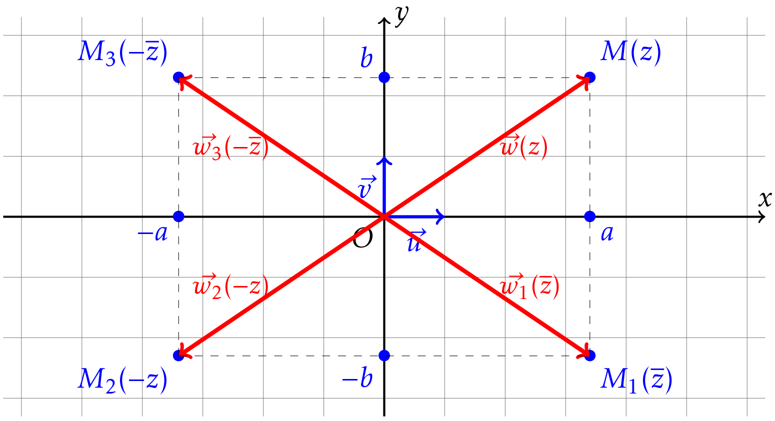
Propriétés : Soit z un nombre complexe, $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

- z est un nombre réel si, et seulement si, M appartient l'axe des abscisses $(O;\vec{u})$;
- z est un nombre réel si, et seulement si, $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ;
- z est un nombre imaginaire pur si, et seulement si, M appartient l'axe des ordonnées $(O;\vec{v})$;
- z est un nombre imaginaire pur si, et seulement si, $\vec{w}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;

II Conjugué et opposé

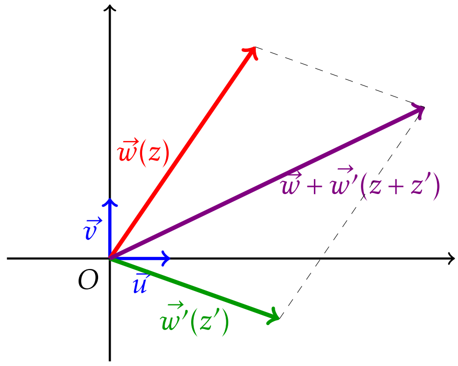
Propriétés : Soit z un nombre complexe.

- Dans le plan complexe, $M(z)$ et $M_1(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- Dans le plan complexe, $M(z)$ et $M_2(-z)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
- Dans le plan complexe, $M(z)$ et $M_3(-\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



III Opérations sur les vecteurs

Propriété : Dans le plan complexe, soit $\vec{w}$ d'affixe z et $\vec{w'}$ d'affixe z' alors $z+z'$ est l'affixe du vecteur $\vec{w}+\vec{w'}$.

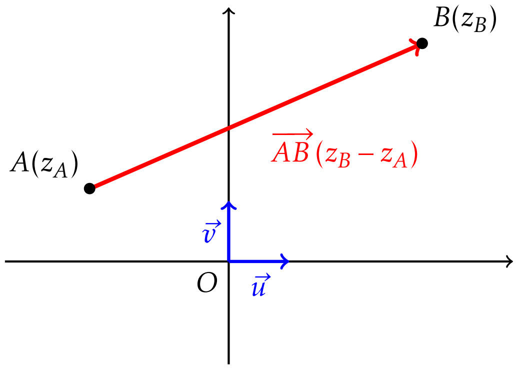


Démonstration 1

Exercice 1 : Soit $z_1 = 2-3\mathrm{i}$ et $z_2 = 4+\mathrm{i}$

1) Calculer z_1+z_2.
2) Représenter dans le plan complexe les points M_1, M_2 et M_3 d'affixe respective z_1, z_2 et z_1+z_2.
3) Quelle est la nature du quadrilatère $OM_1M_3M_2$? Justifier.

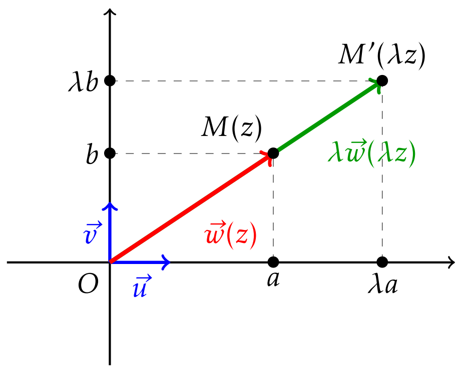
Propriété : Dans le plan complexe, soit les points A d'affixe z_A et B d'affixe z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.



Démonstration 2

Exercice 2 : Reprendre l'exercice 1 et calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Propriété : Dans le plan complexe, soit $\vec{w}$ d'affixe z et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λz est l'affixe du vecteur $\lambda\vec{w}$.



Démonstration 3

Exercice 3 : Reprendre l'exercice 1 et calculer l'affixe du vecteur $\vec{w} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{M_1M_2}$ puis le représenter.

Corollaire : Dans le plan complexe, soit les points A d'affixe z_A et B d'affixe z_B alors le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2}$.

Démonstration 4

Exercice 4 : Reprendre l'exercice 1 et calculer l'affixe de I le milieu du segment $[M_1M_2]$.

Propriété : Dans le plan complexe, soit $\vec{w}$ d'affixe z alors $\|\vec{w}\|^2 = z\bar{z}$.

Démonstration 5

Exercice 5 : Reprendre l'exercice 1 et placer le point M_4 d'affixe 5i.

1) Justifier que le triangle $M_1M_2M_3$ n'est pas isocèle.
2) Justifier que le triangle $M_1M_3M_4$ est rectangle en M_1.