Systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul.

I Matrices inversibles

Propriété : Soit A une matrice carrée d'ordre n.

Si B est une matrice telle que $AB = I_n$ et C une matrice telle que $CA = I_n$, alors $B = C$.

Démonstration 1

Propriété : Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- Si B est une matrice telle que $AB = I_n$ alors $BA = I_n$.
- Réciproquement, si B est une matrice telle que $BA = I_n$ alors $AB = I_n$.

Remarque : cette propriété est admise mais, malgré son aspect simple, sa démonstration n'est pas évidente.

Définitions : Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$;
- Si elle existe, la matrice B est unique, elle est appelée matrice inverse de A et notée A^{-1}.
  On a alors $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Exercice 1 :

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont des matrices inverses.

2) Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer CV et CU.

   b) En raisonnant par l'absurde, montrer que C n'est pas inversible.

Propriétés : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

- A est inversible si, et seulement si, $ad - bc$ est non nul.
- Lorsque $ad - bc \neq 0$ alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Démonstration 2

Définition : Le nombre $ad - bc$ est appelé déterminant de la matrice A et est noté $\det A$.

Exercice 2 : Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

II Systèmes linéaires

Définition : Un système de n équations à n inconnues est un système linéaire de dimension n s'il peut d'écrire sous la forme $AX = B$ où A est une matrice carrée d'ordre n, $X = (x_i)$ et $B = (b_i)$ des vecteurs colonnes à n lignes.

Autrement dit, un système linéaire est de l'une des formes suivantes équivalentes :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \dots \quad \vdots \quad = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Écrire sous forme matricielle le système linéaire $\begin{cases} x + 2y + 5z = -4 \\ 2x - 3z = 4 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$.

Propriété : Soit un système linéaire $AX = B$.

Si A est inversible alors ce système admet une unique solution qui s'écrit $A^{-1}B$.

Démonstration 3

Exercice 4 : Écrire sous forme matricielle puis résoudre le système $\begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ 6x + 2y = -5 \end{cases}$.

Exercice 5 : On considère le système $\mathcal{S}$ $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2z - y = 0 \\ 3x + 2z + 4y = 7 \end{cases}$.

1) Écrire $\mathcal{S}$ sous forme matricielle.
2) À l'aide de la calculatrice, montrer que la matrice du système est inversible.
3) En déduire les solutions de $\mathcal{S}$ par un produit matriciel.

Remarque : Soit un système linéaire $AX = B$.

Si A n'est pas inversible alors le système n'admet aucune solution ou en admet une infinité.

Exercice 6 : Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

III Mémento calculatrice

Numworks	TI 83 (82)	Casio Graph 90+E (35+E)
Menu **Calculs** Boîte à outils **Matrices → Nouvelle matrice** Saisir la matrice Éventuellement, la nommer A Déterminant : Boîte à outils **Matrices → det(M)** det(A) Inverse : Boîte à outils **Matrices → inverse(M)** inverse(A) Autre méthode : A $\boxed{x^y}$ −1	$\boxed{\text{matrice}}$ (ou $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{matrice}}$) Sélectionner le nom puis **éDIT** Saisir la matrice Déterminant : $\boxed{\text{matrice}}$ → **MATH** **1 : dét(**$\boxed{\text{matrice}}$ [A]) Inverse : $\boxed{\text{matrice}}$ [A] $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{x^{-1}}$	$\boxed{\text{MENU}}$ **1. Exe-Mat** Saisir la matrice Déterminant : $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{CATALOG}}$ **Det** $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ M Inverse : $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MAT}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ M $\boxed{\wedge}$ −1