PGCD

I Diviseurs communs de deux entiers

Soit a et b deux entiers.

On note $D(a)$ l'ensemble des diviseurs de a et $D(b)$ l'ensemble des diviseurs de b.

Définition : $D(a;b)$ est l'ensemble des diviseurs communs de a et de b. Autrement dit, $D(a;b) = D(a) \cap D(b)$.

Exercice 1 : Écrire $D(12)$, $D(64)$ puis $D(12;64)$.

Propriétés : (1) $D(a;b) \neq \emptyset$ (2) $D(a;0) = D(a)$ (3) $D(a;b) = D(b;a)$
(4) $D(a;b) = D(a;-b)$ (5) $D(a;b) = D(a-b;b)$ (6) Pour tout entier k, $D(a;b) = D(a-kb;b)$

Démonstration 1

Propriété : Si b divise a alors $D(b) \subset D(a)$ et $D(a;b) = D(b)$

Démonstration 2

II PGCD de deux entiers

Soit a et b deux entiers non simultanément nuls.

Définition : Le plus grand élément de $D(a;b)$ est appelé Plus Grand Commun Diviseur de a et b.
Il est noté $PGCD(a;b)$.

Exercice 2 : Écrire $PGCD(12;64)$ puis $PGCD(51;28)$.

Définition : Lorsque $PGCD(a;b) = 1$ alors a et b sont dits premiers entre-eux.

Propriétés : (1) $PGCD(a;b) > 0$ (2) Si $a \neq 0$ alors $PGCD(a;0) = \ldots$
(3) $PGCD(a;b) = PGCD(b;a)$ (4) $PGCD(a;b) = PGCD(|a|;|b|)$

Démonstration 3

Propriété : Si b divise a alors $PGCD(a;b) = \ldots$ et, en particulier, $PGCD(a;1) = \ldots$.

Démonstration 4

Propriété : Pour tout entier k, $PGCD(a;b) = PGCD(a-kb;b)$.

Démonstration 5

Corollaire : Soit $b \neq 0$ et r le reste de la division euclidienne de a par b alors, $PGCD(a;b) = PGCD(r;b)$.

Démonstration 6

III Algorithme d'Euclide

Soit et deux entiers naturels non nuls.

L'algorithme ci-contre est appelé algorithme d'Euclide.

```
Lire a et b
r ← reste de la division euclidienne de a par b
Tant que r ≠ 0 faire
    a ← b
    b ← r
    r ← reste de la division euclidienne de a par b
FinTantque
Afficher b
```


Exercice 3 :

a) Appliquer l'algorithme à 315 et 98 en complétant le tableau des états ci-dessous ;

b) Recommencer avec 98 et 315.

a	b	r
315	98	

a	b	r
98	315	

Propriété : L'algorithme d'Euclide calcule le $PGCD$ de a et de b en un nombre fini d'étapes.

Démonstration 7

a	b	r_1
b	r_1	r_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_{n-1}	r_n	0

IV Propriétés du PGCD

Soit a et b deux entiers naturels non simultanément nuls.

Propriété : Les diviseurs communs de a et de b sont les diviseurs de $PGCD(a;b)$.

Démonstration 8

Propriété : Homogénéité du $PGCD$.

Pour tout entier naturel non nul k, $PGCD(ka;kb) = k \times PGCD(a;b)$.

Démonstration 9

Exercice 4 : Déterminer $PGCD(420;540)$.

Propriété : Soit d un entier naturel.

$d = PGCD(a;b)$ si, et seulement si, $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' premiers entre-eux.

Démonstration 10

Exercice 5 : Déterminer $PGCD(900;1700)$.

V Mémento calculatrice

Numworks	TI 83 (82)	Casio Graph 90+E (35+E)
Menu **Calculs** Boîte à outils **Arithmétique** → **gcd(p,q)** Fonctionne avec des entiers positifs et négatifs. Attention, gcd(0,0)=0 est faux (en terminale)	math → **NBRE (NUM)** **9 : pgcd(** Fonctionne uniquement avec des entiers positifs. Attention, pgcd(0,0)=0 est faux (en terminale)	MENU **1. Exe-Mat** OPTN F6 ▹ F4 **NUMERIC** (ou **NUM**) F6 ▹ F2 **GCD** Fonctionne avec des entiers positifs et négatifs. Attention, GCD(0,0)=0 est faux (en terminale)

