Théorème de Bézout [1]

I Identité de Bézout (ou théorème de Bachet [2]-Bézout)

<u>Théorème</u> : Soit a et b deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD, alors, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$.

Démonstration 1

<u>Exercice 1</u> : Montrer qu'il existe deux entiers α et β tels que $54\alpha + 42\beta = 6$.

<u>Remarques</u> :

- La réciproque de ce théorème est fausse.
  En effet, $5 \times 1 + 3 \times (-1) = 2$ alors que 5 et 3 sont premiers entre eux.
- Les entiers u et v ne sont pas uniques.
  En effet, $PGCD(14;12) = 2$ et on a $14 \times 1 + 12 \times (-1) = 2$ et $14 \times 13 + 12 \times (-15) = 2$.

<u>Exercice 2</u> :

1) Déterminer le PGCD de 102 et 276 en écrivant toutes les étapes de l'algorithme d'Euclide.
2) En déduire deux entiers u et v tels que $102u + 276v = PGCD(102;276)$.

II Théorème de Bézout

<u>Théorème</u> : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
a et b sont premiers entre-eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration 2

<u>Exercice 3</u> : Montrer qu'il existe deux entiers α et β tels que $71\alpha + 19\beta = 1$ et en donner une valeur.

III Théorème de Gauss [3]

<u>Théorème</u> : Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que a et b sont premiers entre-eux.
Si a divise bc alors a divise c.

Démonstration 3

<u>Corollaire</u> : Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que a et b sont premiers entre-eux.
Si a divise c et b divise c alors ab divise c.

Démonstration 4

<u>Remarque</u> : Sans la condition "a et b sont premiers entre-eux" ce corollaire est, en général, faux.
En effet, 6 divise 12 et 4 divise 12 mais $24 = 6 \times 4$ ne divise pas 12.

<u>Exercice 4</u> : Montrer que le produit de trois entiers consécutifs est un multiple de 6.

IV Équations diophantiennes [4]

Soit a, b et c trois entiers relatifs et d le PGCD de a et de b.

<u>Définition</u> : L'équation $ax + by = c$ d'inconnues x et y est dite diophantienne.

<u>Propriété</u> : L'équation $ax + by = c$ admet des solutions si, et seulement si, c est un multiple de d.

Démonstration 5

<u>Exercice 5</u> : Déterminer les solutions de l'équation diophantienne $71x + 19y = 2$.

1. Étienne Bézout, mathématicien français, né à Nemours le 31 mars 1730 et mort à Avon, le 27 septembre 1783 (à 53 ans).
2. Claude-Gaspard Bachet dit de Méziriac, mathématicien, poète et traducteur français, né le 9 octobre 1581 à Bourg-en-Bresse et mort le 26 février 1638 à Bourg-en-Bresse.
3. Johann Carl Friedrich Gauss, mathématicien, astronome et physicien allemand, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen.
4. Diophante d'Alexandrie, mathématicien de langue grecque qui a vécu à Alexandrie entre le Ier siècle av. J.-C. et le IVe siècle.

CC-BY-NC-SA

JM Lambert - Lycée Bellevue - Le Mans