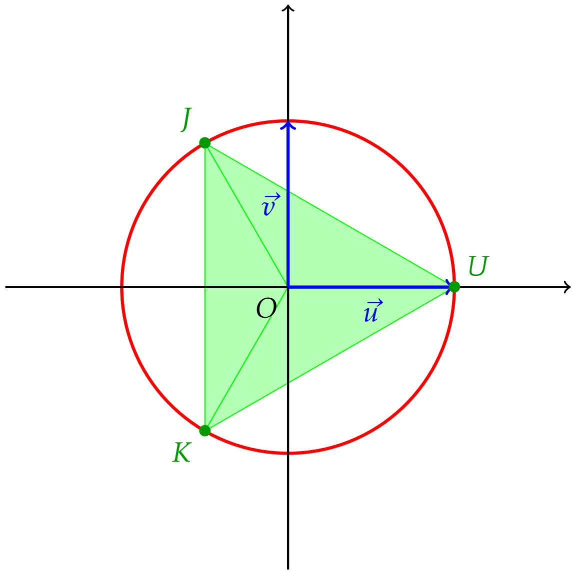
Racines n-ième de l'unité

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation complexe $z^n = 1$.

Les solutions de cette équation sont appelées racines n-ième de l'unité.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des solutions.

1) Déterminer les ensembles $\mathbb{U}_1$ et $\mathbb{U}_2$.
2) a) Déterminer l'ensemble $\mathbb{U}_4$
   b) Démontrer que le polygone, dont les sommets ont pour affixe les racines quatrième de l'unité, est un carré.
3) On considère le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ ci-contre et les sommets U, J et K d'un triangle équilatéral.



   a) Déterminer l'affixe des points U, J et K sous forme exponentielle.
      On note j l'affixe du point J.
   b) Démontrer que l'affixe de K est j^2.
   c) Justifier que 1, j et j^2 sont solutions de l'équation $z^3 = 1$.
   d) Démontrer que z est solution de $z^3 = 1$ si, et seulement si, $\begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{2k\pi}{3} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
      Pour quelles raisons peut-on affirmer que l'équation admet exactement trois solutions ?
4) Pour $n = 2$, $n = 3$ puis $n = 4$, démontrer que la somme des racines n-ième de l'unité est égale à 0.