Forme exponentielle des nombres complexes

I Notation exponentielle imaginaire

Définition : Pour tout réel θ, on écrit $e^{i\theta}$ le nombre $\cos\theta + i\sin\theta$. $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$

Autrement dit, $e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

Exemple : $e^{i0} = \dots$ $e^{i\pi} = \dots$ $e^{i\frac{\pi}{2}} = \dots$ $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \dots$ $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dots$

Propriété : Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous une forme $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et θ est un argument de z. Ces écritures sont appelées forme exponentielle de z

Exercice 1 : Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z = 6e^{i\frac{11\pi}{4}}$.

II Calculer avec la notation exponentielle

Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ alors :

- $z = z'$ si,et seulement si, $r = r'$ et $\theta \equiv \theta' [2\pi]$;
- $\overline{z} = re^{-i\theta}$;
- $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$;
- $z^n = r^n e^{in\theta}$;
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$;
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.

Démonstration 1

Exercice 2 : Soit $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$ et $z' = 1 - i$.

1) Écrire z et z' sous forme exponentielle.
2) Déterminer la forme exponentielle de zz' puis de $\dfrac{z}{z'}$.
3) Montrer que z^{57} est un réel négatif.

Propriété : Formules de Moivre [1]

Pour tout réel θ et tout entier naturel n, $\boxed{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n}$.

Démonstration 2

Propriété : Formules d'Euler [2]

Pour tout réel θ, $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ et $\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$.

Démonstration 3

Exercice 3 : Linéarisation de $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$:

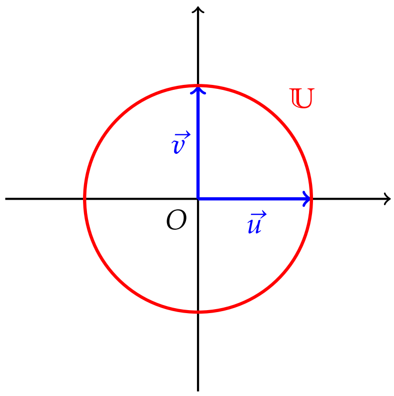
Montrer que $\cos^3\theta = \dfrac{3\cos\theta + \cos(3\theta)}{4}$ et $\sin^3\theta = \dfrac{3\sin\theta - \sin(3\theta)}{4}$

1. Abraham de Moivre, né en 1667 à Vitry-le-François et mort en 1754 à Londres est un mathématicien français.
2. Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 7 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne. (Source Wikipédia)

III Racines n–ième de l'unité

Définition : Le cercle unité, noté $\mathbb{U}$, est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On a donc $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.



Propriété : Soit z et z' deux éléments de $\mathbb{U}$ alors :

- $zz' \in \mathbb{U}$;
- $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$.

Démonstration 4

Définition : Pour tout entier $n > 0$, on appelle racines n-ième de l'unité les solutions de l'équation $z^n = 1$ et on note $\mathbb{U}_n$ cet ensemble.

On a donc $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$.

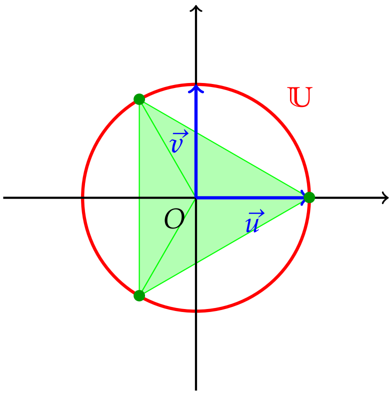
Propriétés :

- Pour tout entier $n > 0$, $\mathbb{U}_n = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in \{0;1;\ldots;n-1\}\right\}$ et possède donc n éléments.
- Pour $n \geqslant 3$, les points images de $\mathbb{U}_n$ forment un polygone régulier à n côtés.
- Pour $n \geqslant 2$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle.

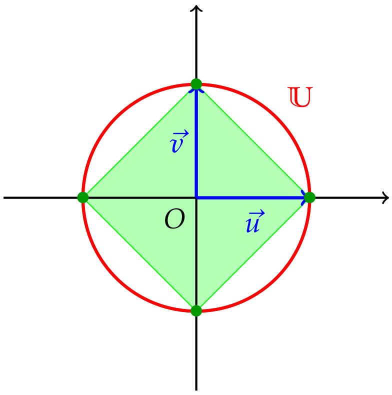
Démonstration 5

Exemples :

$\mathbb{U}_3 = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{3}}, k \in 0;1;2\right\}$



$\mathbb{U}_4 = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{4}}, k \in 0;1;2;3\right\}$



$\mathbb{U}_5 = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{5}}, k \in 0;1;2;3;4\right\}$