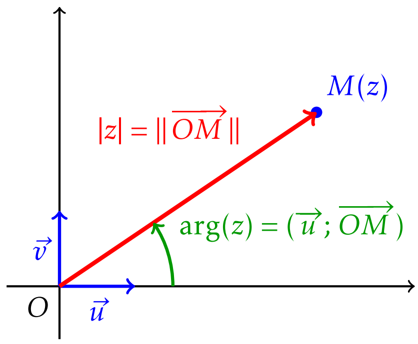
Forme trigonométrique des nombres complexes

I Module et argument d'un nombre complexe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

Définitions : Soit $z \in \mathbb{C}$ et M le point d'affixe z.

- Le module du nombre complexe z, noté $|z|$, est la distance OM.
- Un argument du nombre complexe non nul z, noté $\arg(z)$, est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$.
- Lorsque cette mesure appartient à $]-\pi;\pi]$, c'est l'argument principal de z.



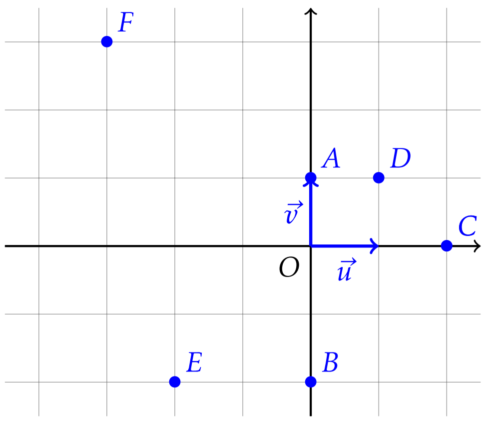
Remarque : $|0| = 0$ mais 0 n'a pas d'argument.

Exercice 1 :

1) Donner l'affixe, le module et un argument pour chacun des six points représentés ci-contre.

Point	A	B	C	D	E	F
Affixe						
Module						
Argument						

2) Placer le point G d'affixe z_G tel que $|z_G| = 2$ et $\arg(z_G) = -\dfrac{9\pi}{4}$



Propriété : Soit z un nombre complexe,

- $|z| = 0$ si, et seulement si, $z = 0$.

Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul,

- z est un réel si, et seulement si, $\arg(z) \equiv 0\,[\pi]$;
- z est un imaginaire pur si, et seulement si, $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$;
- $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\,[2\pi]$;
- $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$.

II Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Propriété : Soit z un nombre complexe, $z = a + \mathrm{i}b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ alors,

- $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ ou encore $|z|^2 = z\bar{z}$;
- Si $z \neq 0$ alors, tout réel θ tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ est un argument de z.

Démonstration 1

Propriété : Soit r un réel strictement positif et θ un réel alors,

le nombre complexe z tel que $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ vérifie $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$.

Démonstration 2

Définition : Soit z un nombre complexe non nul alors $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ où θ est un argument de z.

Cette écriture est appelée forme trigonométrique de z.

Exercice 2 :

1) Écrire sous forme algébrique le nombre z_1 de module 2 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$.
2) Écrire sous forme trigonométrique $\quad z_2 = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} \quad$ et $\quad z_3 = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
3) Placer dans un r.o.n.d. les points M_1, M_2 et M_3 d'affixe respective z_1, z_2 et z_3.

Propriété : Formules d'addition

Soit a et b deux réels alors :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Démonstration 3

Propriétés : Formules de duplication

Soit a un réel alors :
$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a)\\ &= 2\cos^2(a) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(a)\end{aligned} \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$$

Démonstration 4

Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes,

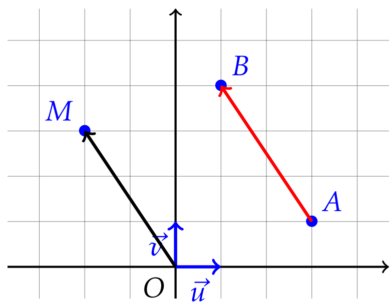
- $|zz'| = |z||z'| \quad$ et $\quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $\quad |z^n| = |z|^n \quad$ et $\quad \arg(z^n) \equiv n \times \arg(z)\,[2\pi]$;
- Si $z \neq 0$ alors $\quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad$ et $\quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$;
- Si $z \neq 0$ alors $\quad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|} \quad$ et $\quad \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)\,[2\pi]$;

Démonstration 5

Exercice 3 : Écrire sous forme trigonométrique $z = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

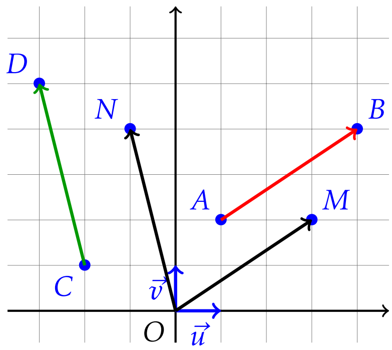
III Aspect géométrique

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.



Propriété : Soit A et B deux points d'affixe respective z_A et z_B alors $\quad AB = |z_B - z_A| \quad$ et $\quad \left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)\,[2\pi]$.

Démonstration 6



Propriété : Soit A, B, C et D deux points d'affixe respective z_A, z_B, z_C et z_D alors $\quad \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

Démonstration 7