

Les graphes

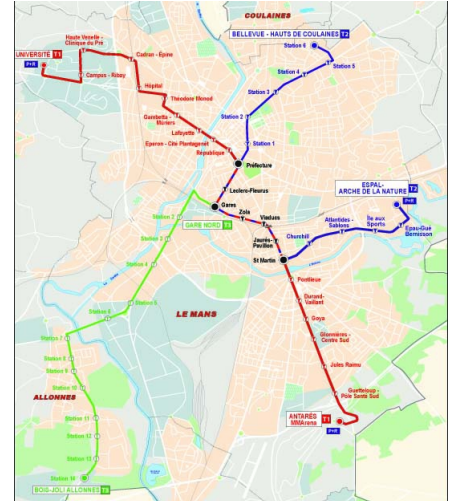
I Description d'un graphe non orienté

Définition : Un **graphe non orienté** est une représentation composée de points (**les sommets**) et de lignes (**les arêtes**).

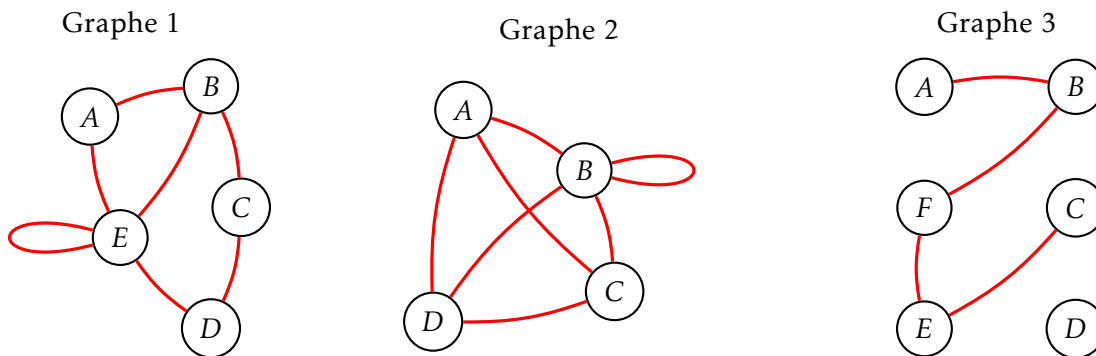
Exemple : Le réseau des lignes de transport d'une ville peut être modélisé par un graphe non orienté. Les sommets sont les stations et les arêtes sont les liaisons par tramway.

Définitions :

- **Une boucle** est une arête qui relie un sommet à lui-même.
- Deux sommets sont **adjacents** s'ils sont reliés par une arête.
- Un sommet est **isolé** s'il n'est adjacent à aucun autre sommet du graphe.
- **Une chaîne** est une suite d'arêtes reliant deux sommets éventuellement confondus.



Exemples :



Définitions : Caractéristiques des éléments d'un graphe

- **L'ordre d'un graphe** est le nombre de sommets de ce graphe.
- **Le degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes reliées à ce sommet, une boucle comptant pour 2.
- **La longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes consécutives qui la composent.
- Un graphe est **complet** si tous les sommets sont deux à deux adjacents.
- Un graphe est **connexe** si chaque couple de sommet peut être relié par une chaîne.

Exercice 1 : Compléter le tableau suivant à propos des graphes donnés en exemple au dessus.

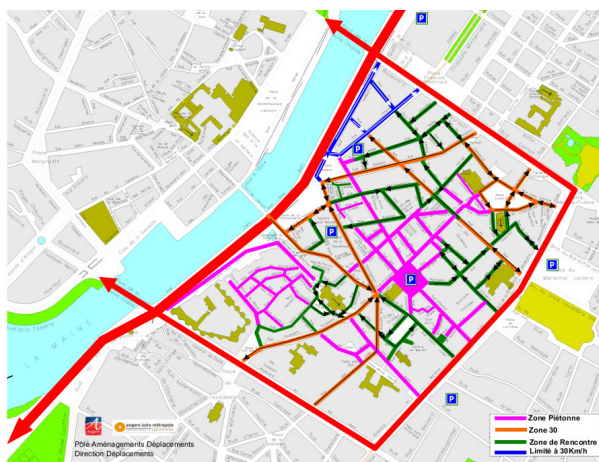
	Graphe 1	Graphe 2	Graphe 3
Ordre du graphe			
Nombre d'arêtes			
Degré du sommet C			
Sommet(s) isolé(s)			
Longueur de la plus petite chaîne de A à C			
Graphe complet ?			
Graphe connexe ?			
Somme des degrés des sommets			

Propriété : Dans un graphe, la somme des degrés est égale au double du nombre d'arêtes.

II Description d'un graphe orienté

Définition : Lorsque les lignes d'un graphe sont munies d'un sens de parcours (les arcs) alors le graphe est orienté.

Exemple : Le plan de circulation automobile dans un centre ville avec les sens uniques, peut-être modélisé par un graphe orienté. Les sommets sont les carrefours, les arêtes sont les rues munies de leur sens de circulation.

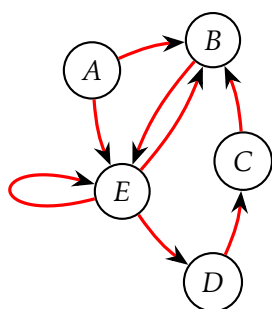


Définitions :

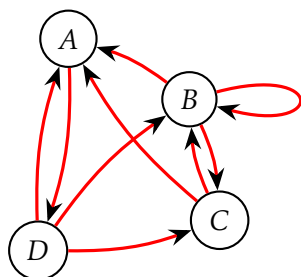
- Une boucle est un arc qui relie un sommet à lui-même.
- Deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par un arc.
- Un sommet est isolé s'il n'est adjacent à aucun autre sommet du graphe.
- Un chemin est une suite d'arcs reliant deux sommets, éventuellement confondus, en tenant compte de leur sens de parcours.

Exemples :

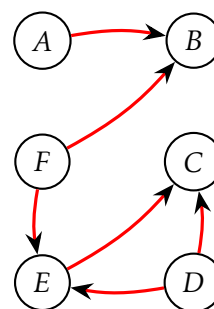
Graphe 4



Graphe 5



Graphe 6



Définitions : Caractéristiques des éléments d'un graphe orienté

- la longueur d'un chemin est le nombre d'arcs consécutifs qui le composent.
- Un graphe orienté est complet si tous les sommets sont deux à deux adjacents et reliés par deux arcs en sens contraires.

Exercice 2 : Compléter le tableau suivant à propos des graphes donnés en exemple au dessus.

	Graphe 4	Graphe 5	Graphe 6
Ordre du graphe			
Nombre d'arcs			
Longueur du plus petit chemin de A à C			
Graphe complet ?			

III Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition : Soit un entier naturel non nul n et un graphe G (orienté ou non) d'ordre n .

Soit S_1, S_2, \dots et S_n les sommets du graphe G , numérotés, et la matrice M , carrée et de dimension n , dont le coefficient m_{ij} est le nombre d'arêtes (ou d'arcs) reliant S_i à S_j .

La matrice M est la matrice d'adjacence du graphe G .

Exercice 3 : Écrire la matrice d'adjacence de chacun des graphes 1 à 6 précédents.

Propriété : La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.

Propriété : Soit un entier naturel non nul n et un graphe G (orienté ou non) d'ordre n .

Soit S_1, S_2, \dots et S_n les sommets du graphe G , numérotés, et la matrice d'adjacence M associée à G .

Pour tout entier naturel non nul k , le coefficient ij de la matrice M^k indique le nombre de chemins (ou de chaînes) reliant S_i à S_j .

Exercice 4 : Pour le graphe 2, déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant A à C .

Écrire toutes les chaînes possibles.

Exercice 5 : Pour le graphe 5, déterminer le nombre de chemins de longueur 2 reliant A à C .

Écrire toutes les chemins possibles.

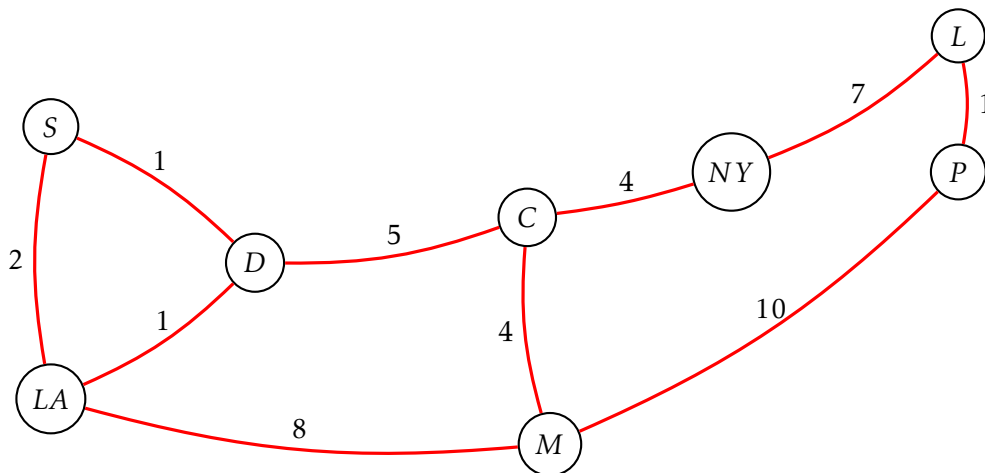
IV Les graphes pondérés

Définitions :

- Un graphe (éventuellement orienté) est pondéré si chacune de ses arêtes (ou chacun de ses arcs) est affecté d'un nombre positif appelé poids de l'arête (ou de l'arc).
- Dans un graphe pondéré, le poids d'une chaîne (ou d'un chemin) est la somme des poids de ses arêtes (ou de ses arcs).

Exemple : Pour un GPS, le réseau routier est un graphe orienté dont les arcs sont les routes pondérées par le temps (ou la distance) nécessaire pour les parcourir. L'itinéraire le plus rapide (ou le plus court) entre deux sommets est alors le chemin de poids minimal reliant ces sommets.

Exercice 6 : Le graphe ci-dessous modélise une partie du réseau Internet entre quelques grandes villes.



Les pondérations correspondent au temps de transmission de la ligne en millisecondes.

De Paris (P) un utilisateur souhaite accéder à une page contenue sur le serveur de Seattle (S).

- Dresser la liste de tous les chemins possibles de P à S (sans passer deux fois par la même ligne).
- Pour chacun d'eux, noter le temps total de transmission. Quel est le chemin optimal ?