Continuité et dérivabilité des fonctions

I Fonctions continues

Définition (continuité en un point) : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

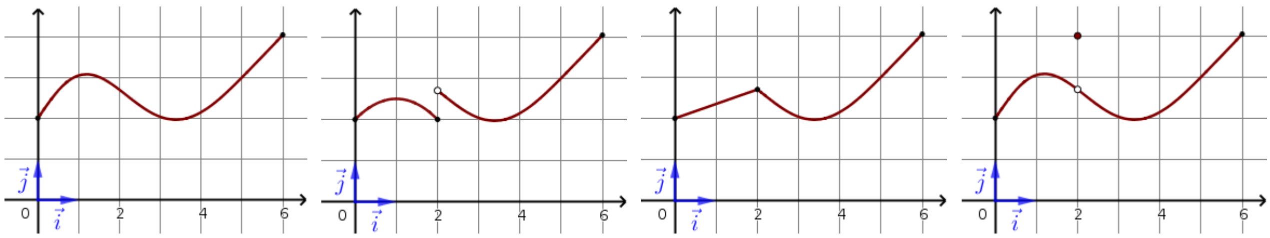
Soit un réel $a \in \mathrm{I}$, f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition (continuité sur un intervalle) : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Graphiquement : Une fonction est continue sur un intervalle si elle est définie sur cet intervalle et, si sa courbe représentative se trace d'un trait ininterrompu (sans lever le crayon).

Exemples : Quelle(s) représentation(s) correspond(ent) à une fonction continue sur $[0;6]$?



Propriété (admise) : Les fonctions polynômes, rationnelles, racine carrée et exponentielle sont continues sur tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition.

Exercice 1 : Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues sur l'intervalle $[-1;+\infty[$?

$$f(x) = \frac{3x^2-4}{x-1} \text{ ; } g(x) = \sqrt{x+1} \text{ ; } h(x) = 6x^3 - 7x + 5 \text{ et } k(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$

Convention : Dans le tableau de variations, une flèche, sur un intervalle, indique que la fonction est continue et strictement monotone.

Exercice 2 : Voici le tableau de variations d'une fonction f sur $]-\infty;15]$.

x	$-\infty$		-1		4		15
f	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

Traduire à l'aide de phrases les informations apportées par ce tableau.

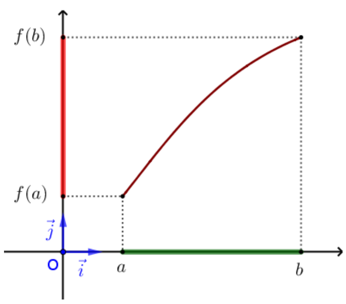
II Valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :

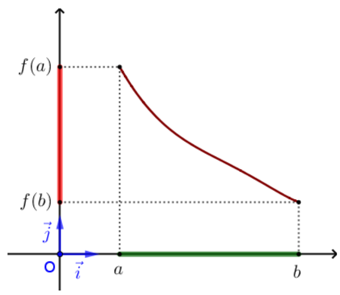
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ alors toute valeur k intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise une fois et une seule par f.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a;b]$

→ Cas d'une fonction strictement croissante



→ Cas d'une fonction strictement décroissante



<u>Remarques</u> :

- L'existence d'une solution est liée à la continuité et son unicité à la stricte monotonie.
- On généralise ce théorème aux intervalles ouverts $]a;b[$ où a peut être $-\infty$ et b peut être $+\infty$. Dans ce cas, la valeur k doit être intermédiaire entre $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$.
- Lorsque $k=0$, il suffit de montrer que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

<u>Exercice 3</u> : Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer le nombre de solutions des équations $f(x)=-6$ et $f(x)=0$

x	$-\infty$		7		10		13		$+\infty$
f			-2				26		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	-5	$\nearrow$		$\searrow$	-1

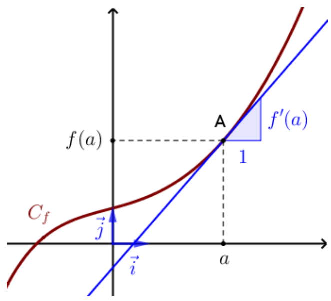
III Dérivation

<u>Définition</u> : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a\in$ I.

f est dérivable en a et admet $l\in\mathbb{R}$ comme nombre dérivé en a lorsque $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$.

Le nombre dérivé de f en a est alors noté $f'(a)$.

On a donc $\boxed{f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$



<u>Interprétation graphique</u> :

Si la fonction f est dérivable en a, le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est $f'(a)$.

L'équation de T est alors $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$

<u>Définition</u> : Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I.

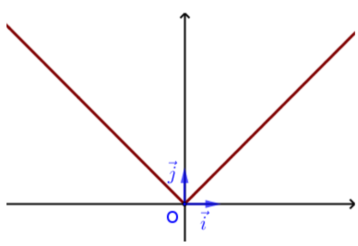
Dans ce cas, la fonction notée f' qui à tout réel $x\in$ I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f.

<u>Propriétés</u> :

- Si une fonction est dérivable en un point a alors elle est continue en a.
- Si une fonction est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur I.

<u>Remarque</u> : La réciproque est fausse.

<u>Exemple</u> : La fonction valeur absolue $x\mapsto|x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.



<u>Graphiquement</u> : Une fonction est dérivable sur un intervalle si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace d'un trait ininterrompu sans point anguleux.

<u>Exercice 3</u> : Reprendre l'exemple du I.

Quelle(s) représentation(s) correspond(ent) à une fonction dérivable sur $[0;6]$?

Dérivée usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Fonction dérivée f'
$f : x \mapsto mx+p$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=m$
$f : x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$
$f : x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f : x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$

Opérations sur les dérivées : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Condition	Fonction dérivée
$u+v$		$u'+v'$
λu avec $\lambda \in \mathbb{R}$		$\lambda u'$
uv		$u'v+uv'$
$\frac{1}{v}$	$x \in \mathrm{I}$ et $v(x) \neq 0$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$x \in \mathrm{I}$ et $v(x) \neq 0$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exercice 4 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x)=4x^3-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

b) $g(x)=\frac{1}{4x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x)=\frac{x^2-1}{2x+4}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

d) $k(x)=(3x^2+5)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$

Théorème : Soit m et p deux réels et g une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $f(x)=g(mx+p)$ est dérivable pour tout réel x tel que $mx+p \in \mathrm{I}$ et on a :

$$\boxed{f'(x)=m \times g'(mx+p)}$$

Exercice 5 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $p(x)=\frac{1}{2x-5}$ sur $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

b) $q(x)=(2x-5)^3$ sur $\mathbb{R}$

IV Mémento calculatrice

Numworks	TI 83 (82)	Casio Graph 90+E (35+E)
Nombre dérivé à partir de l'expression de la fonction : Menu Calculs Boîte à outils **Analyse** → $\frac{d}{dx}(f(x))\Big\rvert_{x=a}$ Nombre dérivé à partir de la courbe de la fonction : Menu Fonctions Onglet Expressions : Saisir $f(x)$ Onglet Graphique : OK puis activer **Nombre dérivé** avec OK puis Retour Se placer sur A$(a;f(a))$ à l'aide des flèches ou avec OK et **Aller à**. Tableau de valeurs de la dérivée : Menu Fonctions Onglet Expressions : Saisir $f(x)$ Onglet Tableau : Se placer sur $f(x)$ puis OK. Activer **Colonne de la dérivée** avec OK puis Retour Équation de la tangente à partir de la courbe de la fonction : Menu Fonctions Onglet Expressions : Saisir $f(x)$ Onglet Graphique : Se placer sur A$(a;f(a))$ à l'aide des flèches ou avec OK et **Aller à**. OK puis **Calculer → Tangente** On peut alors déplacer A à l'aide des flèches. Retour pour sortir du menu.	mode **FONCTION** puis 2nde quitter Nombre dérivé à partir de l'expression de la fonction : math **8: nbreDérivé** Saisir $\frac{d}{dX}(f(X))_{X=a}$ puis entrer. (ou *nbreDérivé*$(f(X),X,a)$) Équation de la tangente à partir de la courbe de la fonction : $f(x)$ puis saisir la fonction. graphe 2nde dessin puis **5: Tangente** Se placer sur A$(a;f(a))$ à l'aide des flèches ou saisir la valeur de a puis entrer. Pour effacer, 2nde dessin puis **1: EffDess** 2nde quitter pour sortir du menu.	Nombre dérivé à partir de l'expression de la fonction : MENU **1 Exe-Mat** F4 **MATH** F4 d/dx Saisir $\frac{d}{dx}(f(x))_{x=a}$ puis EXE. Tableau de valeurs du nombre dérivé à partir de l'expression de la fonction : MENU **7 Table** Saisir la fonction SHIFT SET-UP Sélectionner **Derivative** F1 **On** puis EXIT ou EXE F5 **SET** Régler les paramètres de la table puis EXIT ou EXE F6 **TABLE** Nombre dérivé à partir de la courbe de la fonction : MENU **5 Graphe** Saisir la fonction F6 **DRAW** SHIFT Sketch F2 **Tangent** Se placer sur A$(a;f(a))$ à l'aide des flèches ou saisir la valeur de a. EXIT pour sortir du menu.