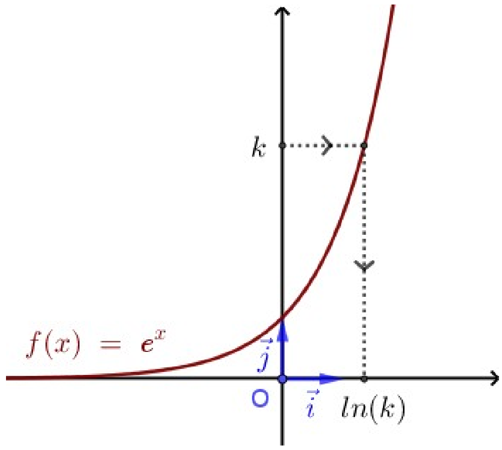
# La fonction logarithme népérien

## I Logarithme népérien d'un réel strictement positif

Définition : Pour tout réel strictement positif $k$, l'équation $\mathrm{e}^x=k$ admet une unique solution.
Cette solution est notée $\ln(k)$ pour logarithme népérien de $k$




Conséquences :

1. $\mathrm{e}^0=1$ donc $\ln(1)=0$
2. $\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$ donc $\ln(\mathrm{e})=1$
3. Pour tout réel $a$, $\ln(\mathrm{e}^a)=a$
4. Pour tout réel $k>0$, $\mathrm{e}^{\ln(k)}=k$

Propriété : Pour tout réel $k>0$, $\mathrm{e}^x=k \Leftrightarrow \ln(k)=x$

Démonstration 1

Exemples : $\mathrm{e}^{\ln(2)}=$ $\qquad$ $\ln(\mathrm{e}^5)=$ $\qquad$ $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=$ $\qquad$ $\mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e})}=$

Notation : S’il n’y a pas d’ambiguïté, pour tout réel $k>0$, $\ln(k)$ sera noté simplement $\ln k$.

Remarque : Pour tout réel $k>0$, $\ln k+1 \neq \ln(k+1)$

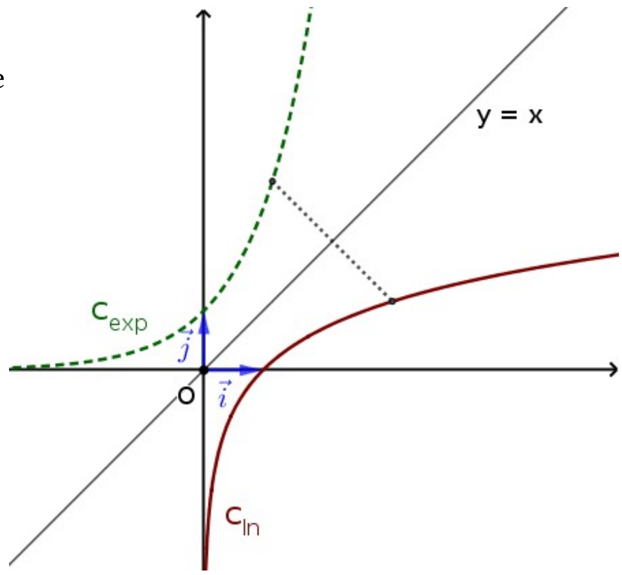
## II La fonction logarithme népérien

Définition : La fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$ par $\ln : x \mapsto \ln x$

Propriétés :

1. La fonction logarithme népérien est la réciproque de la fonction exponentielle.
2. Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$
3. La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 2




Conséquences :

1. Tableau de variation de la fonction ln
2. Si $0<x<1$ alors
3. Si $1<x$ alors
4. Pour tous réels $a>0$ et $b>0$ : $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$
5. Pour tous réels $a>0$ et $b>0$ : $\ln a>\ln b \Leftrightarrow a>b$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

| $x$ | |
|---|---|
| ln | |

CC-BY-NC-SA

## III Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Théorème (relation fonctionnelle) : Pour tous réels $a>0$ et $b>0$, $\boxed{\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)}$

Démonstration 3

Conséquences : Pour tous réels $a>0$, $b>0$ et tout entier relatif $n$ :

$\ln\left(\frac{1}{b}\right)=$ $\qquad$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=$ $\qquad$ $\ln(a^n)=$ $\qquad$ $\ln(\sqrt{a})=\dots$

Démonstration 4

Exercice 1 :

a) Exprimer à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :

$\mathrm{A}=\ln(3\mathrm{e})$ $\qquad$ $\mathrm{B}=\ln(2\mathrm{e}^{-5})$ $\qquad$ $\mathrm{C}=\ln 72$ $\qquad$ $\mathrm{D}=\ln\left(\frac{3\mathrm{e}^2}{2}\right)$

b) Simplifier l'expression $\mathrm{E}=\ln(3+\sqrt{5})^7+\ln(3-\sqrt{5})^7$

## IV Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété : la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$, $\boxed{\ln'(x)=\frac{1}{x}}$

Admis

Exercice 2 : Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point d'abscisse 1.

Propriété : Soit $m$ et $p$ deux réels avec $m\neq 0$.

1. Si $m>0$, la fonction $f(x)=\ln(mx+p)$ est définie et dérivable sur $\left]-\frac{p}{m};+\infty\right[$ et $\boxed{f'(x)=\frac{m}{mx+p}}$.
2. Si $m<0$, la fonction $f(x)=\ln(mx+p)$ est définie et dérivable sur $\left]-\infty;-\frac{p}{m}\right[$ et $\boxed{f'(x)=\frac{m}{mx+p}}$.

Démonstration 5

Exercice 3 : Étudier les variations de la fonction $f$ définie sur $\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$ par $f(x)=\ln\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)$.

## V Fonction logarithme décimal

Définition : La fonction logarithme décimal est notée log et définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}}$.

Propriétés :

1. Pour tout entier relatif, $\log(10^n)=n$
2. La fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
3. Pour tous réels $a>0$ et $b>0$, $\log(ab)=\log(a)+\log(b)$
4. Pour tous réels $a>0$ et $b>0$, $\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$

Démonstration 6

CC-BY-NC-SA