Fonctions et convexité

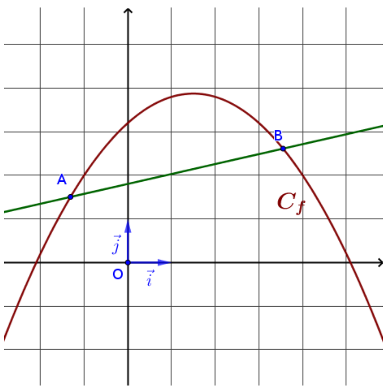
I Convexité d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

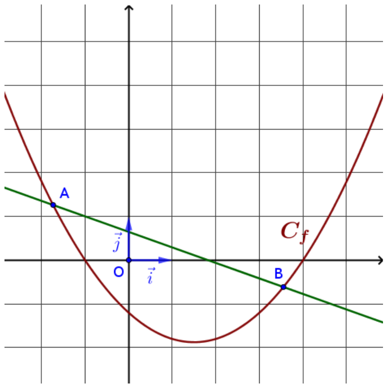
Définition : Pour deux points A et B de $\mathscr{C}_f$, la droite (AB) est appelée sécante de $\mathscr{C}_f$.

Graphiquement, trois cas sont possibles :

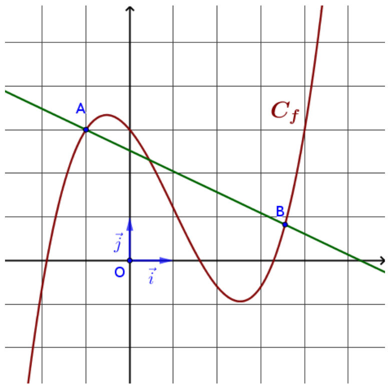
$\mathscr{C}_f$ est au dessus de la sécante



$\mathscr{C}_f$ est au dessous de la sécante



$\mathscr{C}_f$ coupe la sécante



Définitions : f est convexe sur I si, sur cet intervalle, $\mathscr{C}_f$ est au dessous de chacune de ses sécantes ;

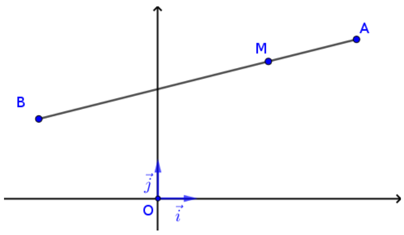
f est concave sur I si, sur cet intervalle, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de chacune de ses sécantes.

Exercice 1 : Graphiquement, parmi les fonctions e^x, $\sqrt{x}$, x^2 et x^3, déterminer celles qui sont convexes, concaves ou ni convexes, ni concaves.

Propriété : Dans le plan est muni d'un repère, on considère les points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$.

Un point $M(x_M ; y_M)$ appartient à [AB] si, et seulement si,

il existe un réel $t \in [0;1]$ tel que $\begin{cases} x_M = t\,x_A + (1-t)\,x_B \\ y_M = t\,y_A + (1-t)\,y_B \end{cases}$



Démonstration 1

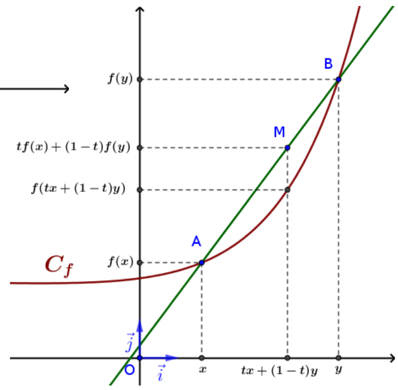
Théorème :

f est convexe sur I si, et seulement si,

pour tout $x \in I$, $y \in I$ et $t \in [0;1]$, $f(tx+(1-t)y) \leqslant t\,f(x)+(1-t)\,f(y)$

f est concave sur I si, et seulement si,

pour tout $x \in I$, $y \in I$ et $t \in [0;1]$, $f(tx+(1-t)y) \geqslant t\,f(x)+(1-t)\,f(y)$



Propriété : f est convexe sur I si, et seulement si, $-f$ est concave sur I.

Exercice 2 : Indiquer graphiquement la convexité des fonctions $-e^x$ sur $\mathbb{R}$ et $-\sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$.

II Convexité et dérivées

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Théorème : f est convexe sur I si, et seulement si, sa dérivée f' est croissante sur I.

f est concave sur I si, et seulement si, sa dérivée f' est décroissante sur I.

Exercice 3 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-9x^2+27x-9$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x)=3(x-3)^2$.

2) En déduire les variations de f' et la convexité de f.

Définition : La fonction f est deux fois dérivable sur I lorsque sa dérivée f' est elle même dérivable sur I. Dans ce cas, la dérivée de f' est notée f''.

Exercice 4 : Montrer que la fonction $f(x)=x^3-9x^2+27x-9$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f''(x)$.

Théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout $x\in \mathrm{I}$, $f''(x)\geqslant 0$;

f est concave sur I si, et seulement si, pour tout $x\in \mathrm{I}$, $f''(x)\leqslant 0$;

Démonstration 2

Exercice 5 : Pour la fonction $f(x)=x^3-9x^2+27x-9$;

1) Étudier le signe de $f''(x)$.

2) Retrouver la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

III Convexité et tangentes

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Propriétés : Si f est convexe sur I alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de ses tangentes.

Si f est concave sur I alors $\mathscr{C}_f$ est au dessous de ses tangentes.

Démonstration 3

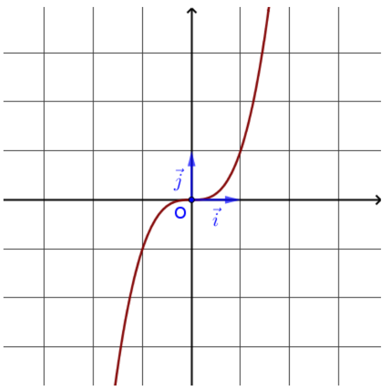
IV Points d'inflexion

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

Définition : Soit A un point de $\mathscr{C}_f$ et T_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.

A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ lorsque $\mathscr{C}_f$ traverse T_A au point A.

Exemple : L'origine du repère est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.



Propriété : $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse a si, et seulement si, f' change de sens de variation en a.

Exercice 6 : Montrer que la courbe représentative de la fonction $f(x)=xe^x$ admet un point d'inflexion d'abscisse −2.

