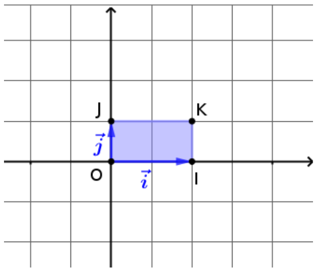
Intégrale d'une fonction continue et positive

I Unité d'aire



Définition : Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$, soit I et J les points tels que $\vec{OI}=\vec{i}$ et $\vec{OJ}=\vec{j}$ et K le point de coordonnées $(1;1)$.

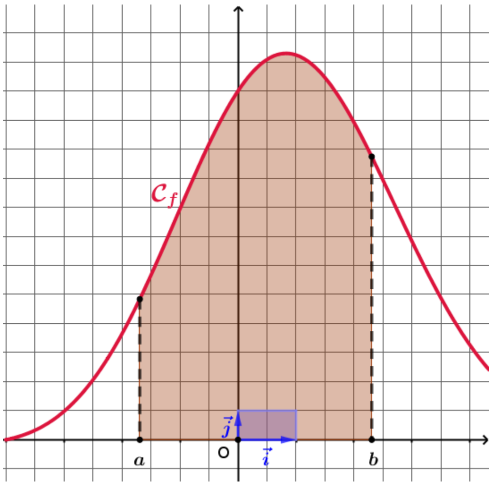
Alors, l'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ.

On note $a(OIKJ)=1\,ua$.

II Aire sous la courbe

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.



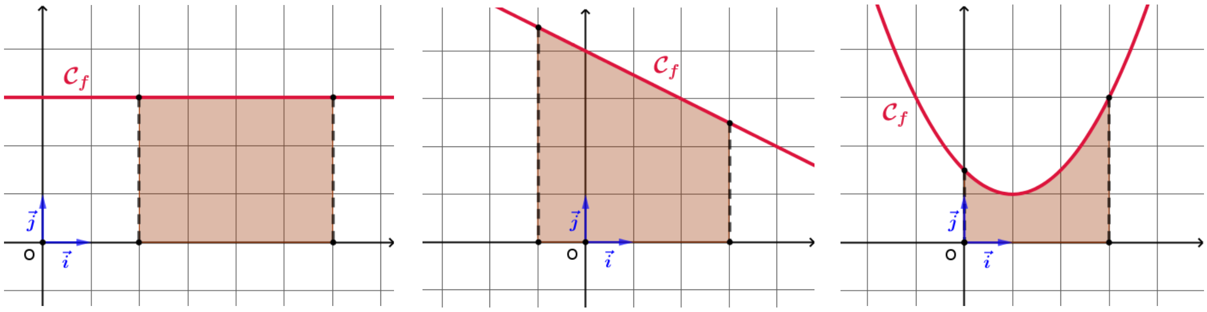
Définition : L'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est appelée intégrale de f sur $[a;b]$.

On la note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et on lit "intégrale de a à b de $f(x)\ dx$"

Remarques :

- a et b sont les bornes d'intégration.
- x est la variable d'intégration, elle peut être remplacée par toute autre lettre, cela ne change pas la valeur de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$
- $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}u$ indiquent la variable d'intégration.

Exercice 1 : Estimer graphiquement les intégrales suivantes.

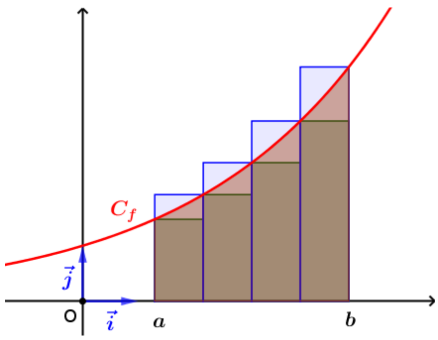


Exercice 2 : Utiliser la calculatrice pour estimer les intégrales suivantes.

a) En mode calcul. b) En mode graphique.

$\int_2^6 3\,\mathrm{d}x=$ $\int_{-1}^3 -0{,}5x+4\,\mathrm{d}x=$ $\int_0^3 0{,}5x^2-x+1{,}5\,\mathrm{d}x=$

III Calcul par la méthode des rectangles



Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

Propriété : L'intervalle $[a;b]$ est partagé en n intervalles de même amplitude. $I(n)$ et $S(n)$ sont les sommes des aires des rectangles inférieurs et supérieurs construits à partir de $\mathscr{C}_f$.

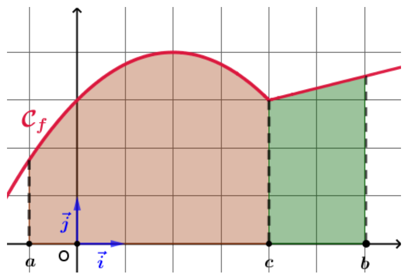
Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} I(n)=\lim\limits_{n\to+\infty} S(n)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

De plus, si f est monotone $I(n)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant S(n)$.

IV Mémento calculatrice

Numworks	TI 83 (82)	Casio Graph 90+E (35+E)
Intégrale à partir de l'expression de la fonction : Menu **Calculs** Boîte à outils **Calculs** → **int(f(x),x,a,b)** Compléter les champs puis EXE Intégrale à partir de la courbe de la fonction : Menu **Fonctions** Onglet **Fonctions** : Saisir $f(x)$ Onglet **Graphique** : OK puis **Calculer** → **Integrale** puis EXE A l'aide des flèches, placer le curseur sur la borne inférieure puis OK Déplacer le curseur sur la borne supérieure puis OK **Retour** pour sortir du menu.	mode et sélectionner **FONCTION** puis 2nde quitter Intégrale à partir de l'expression de la fonction : math **9: intégrFonct(** ou $\int_0^0 0\,d0$ Compléter les champs puis entrer Intégrale à partir de la courbe de la fonction : $f(x)$ puis saisir la fonction. graphe puis 2nde calculs $7:\int f(x)dx$ A l'aide des flèches, placer le curseur sur la borne inférieure puis entrer Déplacer le curseur sur la borne supérieure puis entrer 2nde quitter pour sortir du menu.	Intégrale à partir de l'expression de la fonction : MENU **1 Exe-Mat** F4 **MATH** F6 ▷ F1 $\int dx$ Compléter les champs puis EXE Intégrale à partir de la courbe de la fonction : MENU **5 Graphe** Saisir la fonction F6 **DRAW** SHIFT **G-Solv** F6 ▷ F3 $\int dx$ A l'aide des flèches, placer le curseur sur la borne inférieure puis EXE Déplacer le curseur sur la borne supérieure puis EXE EXIT pour sortir du menu.

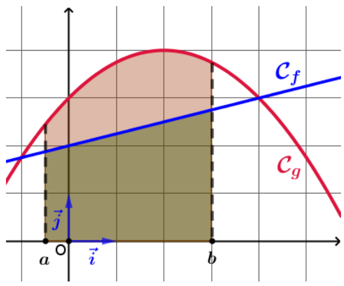
V Propriétés



Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

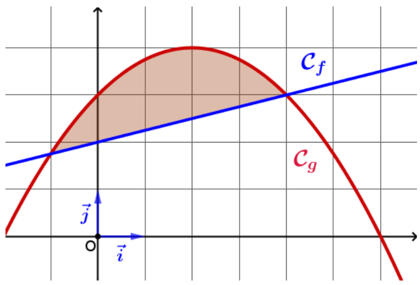
Pour tout $c\in[a;b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



Conservation de l'ordre :

Soit f et g deux fonction continues et positives sur un intervalle $[a;b]$ telles que pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

Exercice 3 :



Ci-contre, sont représentées deux fonctions f et g.
$g(x) = -0,25x^2 + x + 3$

1) Déterminer l'expression de f

2) Calculer l'aire de la surface colorée.

Exercice 4 :

Mêmes questions que dans l'exercice 3.