Lois de probabilités discrètes

Dans tout le chapitre, n est un entier naturel non nul.

I La loi uniforme sur {1 ; 2 ; … ; n}

Définition : Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $\{1;2;\ldots;n\}$ si elle prend chacune des valeurs de 1 à n de manière équiprobable.

Conséquence : Pour tout entier naturel k, $1\leqslant k\leqslant n$, $P(X=k)=\dfrac{1}{n}$.

La loi de X se résume donc par le tableau ci-contre :

x_i	1	2	…	n
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n}$		$\dfrac{1}{n}$

Propriété : Si X suit une loi uniforme sur $\{1;2;\ldots;n\}$

alors $E(X)=\dfrac{n+1}{2}$, $V(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$ et $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$.

Exercice 1 : En Python, la fonction $\text{randint}(1,n)$ fournit un entier aléatoire entre 1 et n.

```python
from random import randint
X=randint(1,13)
print(X)
```

1) Écrire le script ci-contre et le faire fonctionner.

2) Calculer E(X), V(X) et $\sigma(X)$.

3) Modifier le programme pour vérifier ces résultats.

II La loi de Bernoulli

Définition : Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues.

Par convention, l'une des issues est nommée succès (notée S) et l'autre échec (notée $\overline{S}$).

Si l'on note p la probabilité de succès ($P(S)=p$) alors la probabilité d'échec est $1-p$ ($P(\overline{S})=1-p$).

Exemple : Un feu tricolore suit le cycle d'allumage suivant : vert $45\,s$, orange $5\,s$ et rouge $20\,s$.

L'expérience consistant à être autorisé à passer quand on se trouve à hauteur du feu est une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p=\dfrac{9}{14}$.

Définition : La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès lors de l'épreuve de Bernoulli et 0 en cas d'échec suit une loi de Bernoulli dont la loi se résume donc par le tableau ci-contre :

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

Propriété : Si X suit une loi de Bernoulli alors $E(X)=p$, $V(X)=p(1-p)$ et $\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$.

Démonstration 1

Exercice 2 : En Python, le programme ci-contre simule une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{9}{14}$.

```python
from random import random
p=9/14

if random()<=p:
    X=1
else:
    X=0
print(X)
```

1) Écrire le script ci-contre et le faire fonctionner.

2) Calculer E(X), V(X) et $\sigma(X)$.

3) Modifier le programme pour vérifier ces résultats.

III Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

Définition : Un schéma de Bernoulli de taille n est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

> Exercice 3 : Un trajet comporte le passage à 3 feux tricolores fonctionnant indépendamment et suivant le même cycle d'allumage : vert $45\,s$, orange $5\,s$ et rouge $20\,s$.
>
> On nomme S l'événement "être autorisé à passer quand on arrive à hauteur du feux".
>
> 1) Illustrer cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
>
> 2) Calculer la probabilité de n'avoir qu'un seul feu vert sur le trajet.

Définition :Le nombre de façons d'obtenir k succès parmi n dans un schéma de Bernoulli de taille n est appelé nombre de combinaisons de k parmi n ou coefficient binomial $(n;k)$ et se note $\binom{n}{k}$.

> Exercice 4 : À l'aide de l'arbre précédent, retrouver $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.

Propriétés :

- Lorsque $k>n$ alors $\binom{n}{k}=\ldots$
- $\binom{n}{n}=\ldots$, $\binom{n}{0}=\ldots$, $\binom{n}{1}=\ldots$, $\binom{n}{n-1}=\ldots$
- Par convention $\binom{0}{0}=1$.
- Pour tout entier k, $0\leqslant k\leqslant n$, on a la relation $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$.
- Pour tout entier k, $0\leqslant k\leqslant n$, on a la relation $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Triangle de Pascal :

Cette disposition permet de retrouver les coefficients binomiaux à partir des précédents en utilisant la relation ci-dessus.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1						
2						
3						
4						
5						

Mémento calculatrice pour obtenir $\binom{10}{2}$:

Numworks	TI 83 (82)	Casio Graph 90+E (35+E)
Menu **Calculs** [⌂] [paste] **Probabilités →** **Dénombrement →** $\binom{n}{k}$ 10 [▽] 2 [EXE]	10 [math] **PROB 3:Combinaison** 2 [enter]	[Exe-Mat] [EXE] 10 [OPTN] [F6] ▸ [F3] **PROB** [F3] **nCr** 2 [EXE]

IV La loi binomiale

Définition : On répète n fois et de manières indépendantes, la même épreuve de Bernoulli.

On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus.

La loi de X est nommée loi binomiale de paramètres n et p. On note $X \sim \mathscr{B}(n\,;p)$

Propriété : Dans ces conditions, $P(X=k)$ est la probabilité de réaliser k succès parmi n épreuves.

On a alors $\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}}$.

Exercice 5 : Un concours se compose d'un questionnaire à choix multiple (QCM).
Il comporte 12 questions pour lesquelles quatre réponses sont proposées. A chaque fois, une seule réponse est exacte. Un candidat répond au hasard à chaque question du QCM.

1) Avec quelle probabilité peut-il avoir la moitié des réponses exactes ?

2) Quelle est la probabilité qu'il ait au moins trois quarts des réponses fausses ?

Propriété : Si $X \sim \mathscr{B}(n\,;p)$ alors l'espérance est $\boxed{E(X)=np}$ et la variance est $\boxed{V(X)=np(1-p)}$.

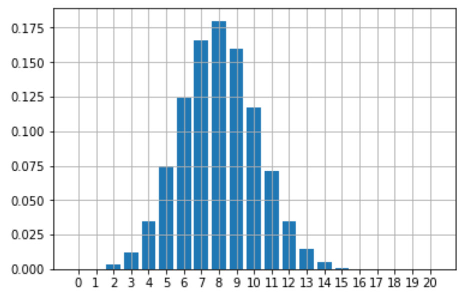
Exercice 6 : En reprenant la situation de l'exercice 5, combien de bonnes réponses un candidat qui répond au hasard à chaque question peut-il espérer obtenir ?

Mémento calculatrice pour obtenir $P(X=4)$ et $P(X\leqslant 4)$ lorsque $X \sim \mathscr{B}(12\,;0{,}25)$:

Numworks	TI 83 (82)	Casio Graph 90+E (35+E)
Menu **Probabilites** **Binomiale ▸** Entrer les paramètres $n=12$ et $p=0{,}25$ puis **suivant**. Calcul de $P(X=4)$ Choisir Saisir $P(X=4)$ EXE Calcul de $P(X\leqslant 4)$ Choisir Saisir $P(X\leqslant 4)$ EXE Autre méthode : Menu **Calculs** **Probabilités →** **Lois de probabilités →** **Binomiale → ...**	2nde distrib Calcul de $P(X=4)$ **A : binomFdp** entrer **nbreEssais :** 12 **p :** 0.25 **valeur de x :** 4 **Coller** entrer entrer Calcul de $P(X\leqslant 4)$ **B : binomFRép** entrer **nbreEssais :** 12 **p :** 0.25 **valeur de x :** 4 **Coller** entrer entrer	MENU **2 Statistique** F5 **DIST** F5 **BINOMIAL** Calcul de $P(X=4)$ F1 **Bpd** **Data :** F2 **Var** **x :** 4 EXE **Numtrial :** 12 EXE **p :** 0.25 EXE **Exécuter** EXE Calcul de $P(X\leqslant 4)$ F2 **Bcd** **Data :** F2 **Var** **Lower :** 0 EXE **Upper :** 4 EXE **Numtrial :** 12 EXE **p :** 0.25 EXE **Exécuter** EXE

Représentation de la loi binomiale : La distribution de la loi binomiale peut être représentée à l'aide d'un diagramme en colonnes. Le graphique prend la forme d'une cloche approximativement symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\lambda$ où λ est l'espérance.

Exemple : Loi binomiale $(20\,;0{,}4)$



V Fluctuation et loi binomiale

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $(n\,;p)$ et un réel α tel que $0<\alpha<1$.

Définition : Soit deux réels a et b tels que $P(a\leqslant X\leqslant b)\geqslant 1-\alpha$ alors l'intervalle $[a\,;b]$ est un intervalle de fluctuation de X au seuil de $1-\alpha$ (ou au risque de α).

Exercice 7 : $X\sim\mathscr{B}(100\,;0{,}55)$ et $\alpha=5\,\%$

Montrer que $[47\,;68]$ est un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95 %.

Mémento calculatrice pour obtenir la table des $P(X\leqslant k)$ pour $0\leqslant k\leqslant 100$ lorsque $X\sim\mathscr{B}(100\,;0{,}55)$:

Numworks	TI 83 (82)	Casio Graph 90+E (35+E)
Menu **Fonctions** **Ajouter une fonction** EXE **Probabilités** ▸ **Loi binomiale** ▸ **binomcdf** EXE $(x\,,100\,,0{,}55)$ EXE **Afficher les valeurs** EXE **Régler l'intervalle** EXE **X début** 0 **X fin** 100 **Pas** 1 **Valider**	$f(x)$ **Y_1=** 2nde distrib **B:binomFRép** entrer **nbreEssais :** 100 entrer **p :** 0.55 entrer **valeur de x :** X,T,θ,n entrer **Coller** entrer 2nde déf table **DébutTbl=** 0 entrer **ΔTbl=**1 entrer 2nde table	MENU **7 Table** EXE **Y1 :** OPTN F6 ▸ F3 **STAT** F1 **DIST** F5 **BINOMIAL** F2 **Bcd** **BinomialCD(**X,θ,T , 100 , 0.55) EXE F5 **SET** **Start :** 0 EXE **End :** 100 EXE **Step :** 1 EXE F6 **TABLE**

Propriété (Intervalle de fluctuation à gauche) :

Soit b le plus petit entier vérifiant $P(X\leqslant b)\geqslant 1-\alpha$ alors l'intervalle $[0\,;b]$ est un intervalle de fluctuation à gauche de X au seuil $1-\alpha$ (ou au risque de α).

Exercice 8 : $X\sim\mathscr{B}(100\,;0{,}55)$ et $\alpha=5\,\%$.

Déterminer un intervalle de fluctuation à gauche de X au seuil de 95 %.

Propriété (Intervalle de fluctuation à droite) :

Soit a le plus petit entier vérifiant $P(X\leqslant a)>\alpha$ alors l'intervalle $[a\,;n]$ est un intervalle de fluctuation à droite de X au seuil $1-\alpha$ (ou au risque de α).

Démonstration 2

Exercice 9 : $X\sim\mathscr{B}(100\,;0{,}55)$ et $\alpha=5\,\%$.

Déterminer un intervalle de fluctuation à droite de X au seuil de 95 %.

Propriété (Intervalle de fluctuation centré) :

Soit a et b tels que a le plus petit entier vérifiant $P(X\leqslant a)>\dfrac{\alpha}{2}$ et b le plus petit entier vérifiant $P(X\leqslant b)\geqslant 1-\dfrac{\alpha}{2}$ alors l'intervalle $[a\,;b]$ est un intervalle de fluctuation centré de X au seuil $1-\alpha$ (ou au risque de α).

Démonstration 3

Exercice 10 : $X\sim\mathscr{B}(100\,;0{,}55)$ et $\alpha=5\,\%$.

Déterminer un intervalle de fluctuation centré de X au seuil de 95 %.

VI La loi géométrique

Définition : On répète, à l'identique et de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p jusqu'à obtention d'un succès.

On nomme X la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires.

La loi de X est nommée loi géométrique de paramètre p. On note $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Propriété : Dans ces conditions, pour tout entier naturel k non nul, $P(X=k)$ est la probabilité de réaliser un succès au bout de k épreuves après avoir subit $k-1$ échecs.

On a alors $\boxed{P(X=k)=(1-p)^{k-1}\times p}$.

Il en découle $\boxed{P(X>k)=(1-p)^{k}}$ et $\boxed{P(X\leqslant k)=1-(1-p)^{k}}$.

Exercice 11 : On lance un dé cubique équilibré dont les face sont numérotées de 1 à 6 jusqu'à obtention d'un 2.

1) Quelle est la probabilité de l'obtenir au cinquième lancé ?

2) Quelle est la probabilité de l'obtenir dans les 5 premiers lancés ?

Propriété : Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ alors l'espérance est $\boxed{E(X)=\frac{1}{p}}$.

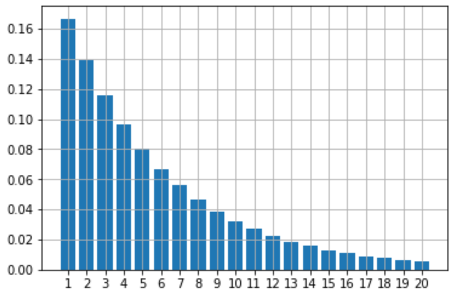
Exercice 12 : En reprenant la situation de l'exercice 11, déterminer en combien de lancés on peut espérer obtenir un 2 ?

Mémento calculatrice pour obtenir $P(X=5)$ et $P(X\leqslant 5)$ lorsque $X \sim \mathscr{G}\left(\frac{1}{6}\right)$:

Numworks	TI 83 (82)	Casio Graph 90+E (35+E)
Menu **Probabilites** **Géométrique** ▸ Entrer les paramètres $p=\frac{1}{6}$ puis analogue à la loi binomiale.	2nde distrib Calcul de $P(X=5)$ **F : géomtFdp** entrer puis analogue à la loi binomiale. Calcul de $P(X\leqslant 5)$ **G : géomtFRép** entrer puis analogue à la loi binomiale.	MENU **2 Statistique** F5 **DIST** F6 ▸ F2 **GEO** Calcul de $P(X=5)$ F1 **Gpd** puis analogue à la loi binomiale. Calcul de $P(X\leqslant 4)$ F2 **Gcd** puis analogue à la loi binomiale.

Représentation de la loi géométrique : La distribution de la loi géométrique peut être représentée à l'aide d'un diagramme en colonnes. Le graphique correspond à une décroissance exponentielle et la première barre a pour hauteur le paramètre p.

Exemple : Loi géométrique $\left(\frac{1}{6}\right)$



Propriété de non vieillissement ou d'absence de mémoire :

- Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ alors alors, pour tous entiers $m>0$ et $n>0$, $P_{X>m}(X>m+n)=P(X>n)$.
- Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie, pour tous entiers $m>0$ et $n>0$, $P_{X>m}(X>m+n)=P(X>n)$ alors X suit une loi géométrique.

Exercice 13 : En reprenant la situation de l'exercice 11, si les 5 premiers lancés n'ont pas permis d'obtenir un 2, quelle est la probabilité d'avoir à lancer le dé au plus 8 fois ?