Primitives et intégrale

I Primitive d'une fonction continue

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et pour tout $x\in[a;b]$, $F'(x)=f(x)$.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Une primitive de f sur I, est une fonction F dérivable sur I dont la dérivée est f.

Autrement dit, pour tout $x\in\mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(x)=f(x)$.

Exercice 1 : Soit $\mathrm{F}(x)=5x^2+3$ et $\mathrm{G}(x)=5x^2-4$

Montrer que F et G sont deux primitives de $f(x)=10x$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $[1;20]$ par $f(x)=\ln x$.

Donner une primitive de de f sur $[1;20]$ qui s'annule en $x=1$.

En déduire une primitive de la fonction g définie sur $[1;20]$ par $g(x)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

II Ensemble des primitives d'une fonction continue

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I alors, toutes les primitives de f sur I sont définies sur I par $\mathrm{G}(x)=\mathrm{F}(x)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Autrement dit, les primitives de f ne diffèrent que d'une constante.

Démonstration 1

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble des primitives de $f(x)=10x$ sur $\mathbb{R}$.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I alors pour tout $x_0\in\mathrm{I}$ et $y_0\in\mathbb{R}$ il existe une unique primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

Démonstration 2

Exercice 4 : Déterminer la primitive H sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x)=10x$ vérifiant $\mathrm{H}(1)=2$.

III Primitives usuelles

Fonction f	Primitives de f	Intervalle de validité
$f(x)=a$ avec $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$	$\mathrm{F}(x)=$	
$f(x)=x$	$\mathrm{F}(x)=$	
$f(x)=x^n$ avec $n\in\mathbb{N}$	$\mathrm{F}(x)=$	

Exercice 5 : Calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f(x)=x^7$.

Fonction f	Primitives de f	Intervalle de validité
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathrm{F}(x)=$	
$f(x)=\dfrac{a}{ax+b}$ avec $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$	$\mathrm{F}(x)=$	
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathrm{F}(x)=$	
$f(x)=\dfrac{a}{\sqrt{ax+b}}$ avec $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$	$\mathrm{F}(x)=$	
$f(x)=\mathrm{e}^{x}$	$\mathrm{F}(x)=$	
$f(x)=a\,\mathrm{e}^{ax+b}$	$\mathrm{F}(x)=$	

IV Opérations sur les primitives

Propriétés : Soit u et v deux fonctions continues sur un intervalle I, admettant U et V comme primitives respectives sur I alors :

- Une primitive de la fonction $u+v$ sur I est la fonction $\mathrm{U}+\mathrm{V}$.
- Pour tout réel k, une primitive de la fonction $k\,u$ sur I est la fonction $k\,\mathrm{U}$.

Exercice 6 : Calculer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x)=4x^3-4x+5$, $h(x)=\dfrac{5}{2x+3}$ et $g(x)=6\mathrm{e}^{5-3x}$.

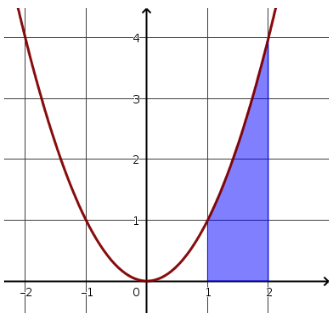
V Lien avec l'intégrale

Propriété : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors,
pour toute primitive F de f sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$

Notation : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=[\mathrm{F}(t)]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$

Démonstration 3

Exercice 7 : Calculer l'aire exacte sous la parabole représentant $f(x)=x^2$ entre $x=1$ et $x=2$.



VI Intégrale d'une fonction continue (de signe quelconque)

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F l'une de ses primitives sur I alors pour tous $a\in\mathrm{I}$ et $b\in\mathrm{I}$, l'intégrale de a à b de la fonction f est le nombre $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

Notation : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=[\mathrm{F}(t)]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$

Remarques :

- Lorsque f est positive et $a\leqslant b$ alors on retrouve l'aire sous la courbe du V.
- L'intégrale de a à b de la fonction f ne dépend pas de la primitive choisie.
- La fonction $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration 4

VII Propriétés de l'intégrale

Soit a, b et c trois réels d'un intervalle I et f et g deux fonctions continues sur I.

- Nullité : $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$
- Opposition : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- Linéarité : Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$ alors $\int_a^b(\lambda f(t)+\mu g(t))\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- Positivité : Avec $a\leqslant b$, si $f(x)\geqslant 0$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$
- Négativité : Avec $a\leqslant b$, si $f(x)\leqslant 0$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 0$
- Relation d'ordre : Avec $a\leqslant b$, si $f(x)\leqslant g(x)$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

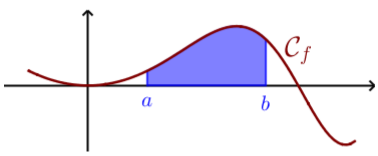
  Démonstration 5

VIII Retour à la notion d'aire

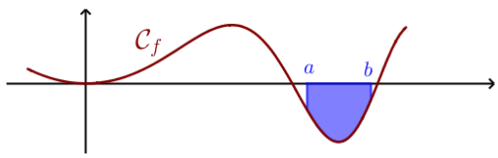
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

Propriété : Soit $a\in$I et $b\in$I avec $a\leqslant b$. Lorsque f est de signe constant sur $[a;b]$, notons S la surface comprise entre l'axe des abscisses, $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Si $f(x)\geqslant 0$ sur $[a;b]$ alors $\mathscr{A}(\mathrm{S})=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

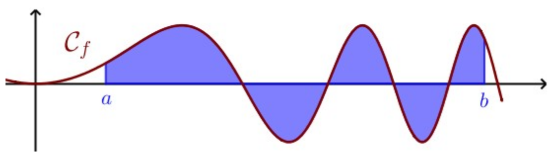


Si $f(x)\leqslant 0$ sur $[a;b]$ alors $\mathscr{A}(\mathrm{S})=-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

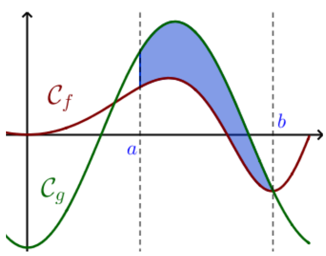


Démonstration 6

Corollaire : Lorsque f change de signe sur I, on partage l'intervalle I en plusieurs intervalles sur lesquels le signe de f est constant. Pour tous $a\in$I et $b\in$I avec $a\leqslant b$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est alors la somme algébrique des aires des différentes surfaces affectées de leur signe.



Propriété : Soit g une autre fonction continue sur I de représentation $\mathscr{C}_g$.
Pour tous $a\in$I et $b\in$I avec $a\leqslant b$, si $f(x)\leqslant g(x)$ sur $[a;b]$ alors l'aire de la surface comprise entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est $\int_a^b g(t)-f(t)\,\mathrm{d}t$



IX Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $a<b$.

La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le nombre réel m donné par $m=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Remarque : Si la fonction f est positive sur $[a;b]$, le rectangle de hauteur m et de longueur $b-a$ a la même aire que la surface sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b.