

## Quand il pleut des cordes dans un cercle

$n$  désigne un nombre entier naturel non nul.

Sur un cercle, on place  $n$  points distincts et on trace toutes les cordes possibles.

On s'intéresse au nombre de cordes tracées et au nombre de régions obtenues à l'intérieur dans le disque.

- 1) A l'aide de schémas, déterminer les résultats lorsque  $n$  prend les valeurs de 1 à 4.
- 2) À partir de ces résultats, conjecturer les cas suivants et établir des formules générales.
- 3) Contrôler pour  $n = 5$  puis  $n = 6$ .
- 4) Que reste-t-il à démontrer? Le démontrer.

## A la recherche d'une suite

On considère la suite  $(u_n)$  définie par la récurrence suivante :

- Le premier terme est  $u_0 = 0$ ;
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$ .

Le but de l'exercice est d'exprimer explicitement  $u_n$  en fonction de  $n$ .

- 1)
  - a) Calculer les 20 premiers termes.
  - b) Représenter graphiquement les points de coordonnées  $(n; u_n)$  pour  $0 \leq n \leq 19$ .
  - c) Le nuage de points a-t-il une particularité? Si oui, laquelle?
- 2) Pour un entier non nul  $n$  donné, on peut calculer la valeur de  $u_n$  si l'on connaît la valeur du terme précédent  $u_{n-1}$ . On voudrait, à présent, pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de  $n$ , le terme  $u_n$  sans nécessairement connaître le précédent.
  - a) À l'aide du graphique précédent, conjecturer une formule donnant, pour n'importe quelle valeur de l'entier  $n$ , l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - b) Démontrer que la formule est effectivement valable pour tout entier  $n$ .

## Les tours de Hanoï



FIGURE 1 – Un modèle de [tour de Hanoï](#) à huit disques (Source Wikipédia)

Le jeu des tours de Hanoï fut inventé par le mathématicien français Édouard Lucas<sup>1</sup> dans la seconde moitié du 19<sup>e</sup> siècle. Ce jeu consiste à déplacer des disques de diamètres différents d'une tour de « départ » à une tour d'« arrivée » en passant par une tour « intermédiaire », et ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :

- On ne peut déplacer plus d'un disque à la fois ;
- on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.

On suppose que cette dernière règle est également respectée dans la configuration de départ.

Peut-on espérer finir le jeu s'il y a 64 disques sur la première tour ?

1. François Édouard Anatole Lucas (Amiens, 1842-Marseille, 1891). (Source Wikipédia)