Composition des fonctions

1) Rappeler les ensembles de définition, de dérivabilité et la dérivée des cinq fonctions suivantes :

$$a(x) = x+1 \qquad p(x) = x^4 \qquad q(x) = \frac{1}{x} \qquad r(x) = \sqrt{x} \qquad s(x) = \mathrm{e}^x$$

2) Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^4$ et $g(x) = x^4+1$.

   a) Calculer les images de 0 ; 1 puis -1 par les fonctions f et g.

   b) Écrire le schéma de composition de chacune des fonctions pour le calcul de l'image d'un réel x.

   $f : x \longmapsto \ldots\ldots \longmapsto \ldots\ldots$ On notera $\boxed{f = p \circ a}$.

   $g : x \longmapsto \ldots\ldots \longmapsto \ldots\ldots$ On notera $\boxed{g = a \circ p}$.

3) a) Exprimer les fonctions $s \circ r$ et $r \circ s$ en fonction de x.

   b) Calculer les images de 0 ; 1 ; 4 puis -4 par ces deux fonctions.

   c) Donner les ensembles de définition respectifs D_{sor} et D_{ros} .

4) a) Exprimer les fonctions $q \circ a$ et $a \circ q$ en fonction de x.

   b) Calculer les images de 0 ; 1 puis -1 par ces deux fonctions.

   c) Donner les ensembles de définition respectifs $D_{q\circ a}$ et $D_{a\circ q}$.

5) a) Exprimer les fonctions $q \circ (a \circ p)$ et $(q \circ a) \circ p$ en fonction de x.

   b) Calculer les images de 0 ; 1 puis -1.

   c) Donner l'ensemble de définition de $q \circ a \circ p$.

6) a) Exprimer les fonctions $p \circ (a \circ q)$ et $(p \circ a) \circ q$ en fonction de x.

   b) Calculer les images de 0 ; 1 puis -1.

   c) Donner l'ensemble de définition de $p \circ a \circ q$.

Dérivée d'une fonction composée

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$.

1) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.

   a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

   b) Expliciter, sans développer, les expressions définies par $\varphi(x) = g \circ f(x)$ et $h(x) = g' \circ f(x)$.

   c) On admet que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Rappeler la dérivée d'un produit de fonctions puis démontrer que pour tout réel x,

   $$\varphi'(x) = 2(2x+1)(x^2+x+1)$$

   d) En déduire une relation entre $\varphi'(x)$, $f'(x)$ et $h(x)$.

3) Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = \dfrac{1}{x}$.

   a) Expliciter, sans développer, les expressions définies par $\psi(x) = q \circ f(x)$ et $k(x) = q' \circ f(x)$.

   b) On admet que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Rappeler la dérivée d'un quotient de fonctions puis déterminer $\psi'(x)$.

   c) En déduire une relation entre $\psi'(x)$, $f'(x)$ et $k(x)$.