Les nombres complexes

I Présentation de l'ensemble des nombres complexes

Théorème : (admis) Il existe un ensemble ,noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes ayant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{C}$ contient un élément, noté i, tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication ayant les mêmes propriétés que celles sur $\mathbb{R}$.

Exemples :

- -5 et i appartiennent à $\mathbb{C}$.
- Les nombres $3+\mathrm{i}$ et $-5\mathrm{i}$ appartiennent à $\mathbb{C}$.
- $-5\mathrm{i}(3+\mathrm{i}) = -15\mathrm{i} - 5\mathrm{i}^2 = -15\mathrm{i} - 5 \times (-1) = 5 - 15\mathrm{i}$ appartient à $\mathbb{C}$.

II Forme algébrique

Propriété : Tout nombre complexe s'écrit sous une forme unique $a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Démonstration 1

Définition : Soit z un nombre complexe avec $z = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- a est appelé partie réelle du nombre complexe. On note $\mathfrak{Re}(z) = a$.
- b est appelé partie imaginaire du nombre complexe. On note $\mathfrak{Im}(z) = b$.

Exemples :

- $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ alors $\mathfrak{Re}(z_1) = 2$ et $\mathfrak{Im}(z_1) = -3$.
- $z_2 = \frac{5}{3}\mathrm{i}$ alors $\mathfrak{Re}(z_2) = 0$ et $\mathfrak{Im}(z_2) = \frac{5}{3}$.
- $z_3 = \sqrt{2}$ alors $\mathfrak{Re}(z_3) = \sqrt{2}$ et $\mathfrak{Im}(z_3) = 0$.

Conséquence : Soit $z \in \mathbb{C}$, lorsque $\mathfrak{Im}(z) = 0$ alors z est un nombre réel.

Définitions : Soit $z \in \mathbb{C}$, lorsque $\mathfrak{Re}(z) = 0$ on dit que z est un imaginaire pur.

Exemples : Parmi les exemples précédents, z_2 est un imaginaire pur et z_3 est réel.

Corollaires : Soit z et z' deux nombres complexes.

- $z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{Re}(z) = 0$ et $\mathfrak{Im}(z) = 0$
- $z = z' \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Re}(z')$ et $\mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z')$

Exercice 1 : Soit $x \in \mathbb{R}$ et les nombres complexes $z = x^2 - 3x + 2 - \mathrm{i}x$ et $z' = \mathrm{i}x^2 - 5x + 5 - 6\mathrm{i}$.

1) Calculer la valeur de z et de z' pour $x = 3$.
2) Pour quelles valeurs de x, z est-il imaginaire pur ?
3) Pour quelles valeurs de x, z' est-il un réel ?
4) Pour quelles valeurs de x, z et z' sont-ils égaux ?

III Opérations sur les nombres complexes

Dans cette partie, a, b, a' et b' désignent des nombres réels.

En étendant les règles de calcul de $\mathbb{R}$ aux formes algébriques des nombres complexes et en utilisant le résultat supplémentaire $\mathrm{i}^2 = -1$, on obtient les règles suivantes.

Somme de deux nombres complexes

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes alors $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$.

Démonstration 2

Exercice 2 : Soit $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 4 + \mathrm{i}$, calculer $z_1 + z_2$.

Opposé d'un nombre complexe

L'opposé d'un nombre complexe z est l'unique nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$.

Le nombre z' est alors noté $-z$ et, si $z = a + \mathrm{i}b$ avec alors $-z = (-a) + \mathrm{i}(-b)$.

Exercice 3 : Écrire l'opposé de $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$.

Soustraction de deux nombres complexes

Soit z et z' deux nombres complexes alors $z - z'$ est défini par $z + (-z')$.

Si $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ alors $z - z' = (a - a') + \mathrm{i}(b - b')$.

Exercice 4 : Soit $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 4 + \mathrm{i}$, calculer $z_1 - z_2$.

Produit de deux nombres complexes

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ deux nombres complexes alors $zz' = z \times z' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba')$.

Démonstration 3

Exercice 5 : Soit $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 4 + \mathrm{i}$, calculer $z_1 \times z_2$.

Cas particulier du produit d'un réel par un complexe

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda z = \lambda a + \mathrm{i}\lambda b$.

Exercice 6 : Calculer $-5z_1$ où $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$.

Inverse d'un nombre complexe

L'inverse d'un nombre complexe z non nul est l'unique nombre complexe z' tel que $zz' = 1$.

Le nombre z' est alors noté $\frac{1}{z}$ et, si $z = a + \mathrm{i}b$, alors $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2 + b^2}$.

Démonstration 4

Exercice 7 : Calculer l'inverse de $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ puis celui de $z_2 = 4 + \mathrm{i}$.

Quotient de deux nombres complexes

Soit z et z' deux nombres complexes avec $z \neq 0$ alors $\frac{z'}{z}$ est défini par $z' \times \frac{1}{z}$.

Si $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ alors $\frac{z'}{z} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + \mathrm{i}\frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}$.

Démonstration 5

Exercice 8 : Soit $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 4 + \mathrm{i}$, calculer $\frac{z_1}{z_2}$ puis $\frac{z_2}{z_1}$.

IV Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Le conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ où a et b sont des réels, est le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - ib$.

Exercice 9 : Écrire les conjugué de $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + i$, $z_3 = 5$ et $z_4 = 7i$.

Propriétés : (de la conjuguaison) Soit $z \in \mathbb{C}$,

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z + \overline{z} = 2\,\mathfrak{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$
- z est un réel si, et seulement si, $\overline{z} = z$
- z est un imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{z} = -z$

Démonstration 6

Propriétés : (Conjugaison et opérations) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$,non nuls lorsque cela est nécessaire,

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

Démonstration 7

V Puissances d'un nombre complexe

Propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ et $i^{4n+3} = -i$.

Conséquence : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i^n = i^r$ où r le reste de la division euclidienne de n par 4.

Démonstration 8

Exercice 10 : Calculer $(5i)^3$ puis $(2i)^{10}$.

Propriété : Pour tous réels a et b,

- $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$
- $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab$
- $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

Démonstration 9

Exercice 11 : Calculer $(2 - 3i)^2$ puis $(4 + i)^2$.

Propriété : (Formule du binôme de Newton)

Soit u et v deux nombres complexes alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(u + v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$

Démonstration 10

Exercice 12 : Calculer $(2 - 3i)^3$ puis $(1 + i)^5$.