Les nombres entiers naturels

I Diviseurs d'un nombre entier

Définition : a et b sont des nombres entiers positifs.

Effectuer la division euclidienne de b par a, c'est déterminer les deux entiers positifs q et r tels que :

$$\boxed{b=q\times a+r \quad \text{avec} \quad r<a}.$$

Le nombre q est appelé quotient euclidien et r est le reste.

Exercice 1 : a) Écrire la division euclidienne de 365 par 7.
b) Interpréter le résultat obtenu.

Définition : a est un diviseur de b lorsque le reste de la division euclidienne de b par a est nul.

Autrement dit, il existe un entier q tel que $\boxed{b=q\times a}$

Dans ce cas on dit aussi que b est divisible par a ou encore que b est un multiple de a.

Exemple : 12 est un diviseur de 60 puisque $60=5\times 12$

Exercice 2 : 16 est-il un diviseur de 180 ?
13 est-il un diviseur de 299 ?
11 est-il un diviseur de 561 ?

Propriétés :

- Tout nombre entier est divisible par 1
- Tout nombre entier est divisible par lui-même
- Zéro est divisible par tout nombre entier.

Démonstration 1

Les critères de divisibilité :

- Un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.

  Exemples : 85 35<u>6</u> est divisible par 2
  36<u>5</u> n'est pas divisible par 2

- Un nombre entier est divisible par 3 si la somme des chiffres a pour diviseur 3.

  Exemples : 85 356 est divisible par 3 (8+5+3+5+6=<u>27</u> et $27=9\times 3$)
  365 n'est pas divisible par 3 (3+6+5=<u>14</u> et $14=4\times 3+2$)

- Un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.

  Exemples : 85 35<u>6</u> n'est pas divisible par 5
  36<u>5</u> est divisible par 5

- Un nombre entier est divisible par 9 si la somme des chiffres a pour diviseur 9.

  Exemples : 85 356 est divisible par 9 (8+5+3+5+6=<u>27</u> et $27=3\times 9$)
  365 n'est pas divisible par 9 (3+6+5=<u>14</u> et $14=1\times 9+5$)

Exercice 3 : Donner un critère de divisibilité par 4, 10 et 11.

Définitions et propriétés :

Un nombre entier est pair lorsqu'il est divisible par 2.
C'est à dire, un nombre entier n est pair si, et seulement si, il existe un entier p tel que $\boxed{n=2p}$.

Un nombre entier est impair lorsqu'il n'est pas divisible par 2.
C'est à dire, un nombre entier n est impair si, et seulement si, il existe un entier p tel que $\boxed{n=2p+1}$.

Exercice 4 : Que peut-on dire à propos du carré d'un nombre impair ? Le prouver.

II Les nombres premiers

Définition : Un nombre entier positif est premier s'il admet exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples : 6 n'est pas un nombre premier
7 est un nombre premier
0 n'est pas un nombre premier
1 n'est pas un nombre premier
2 est le premier nombre premier et c'est le seul qui soit pair

Exercice 5 : Écrire, ci-dessous, la liste des 15 premiers nombres premiers.

....

Propriétés :

- Il existe une infinité de nombres premiers.
- Un nombre entier n supérieur à 2 est premier, s'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$.

Exercice 6 : 127 est-il premier ?

III Décomposition en facteurs premiers

Propriété : Tout nombre entier se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers.

Exemples : $28=2\times2\times7$ ou encore $28=2^2\times7$
$360=2\times2\times2\times3\times3\times5$ ou encore $360=2^3\times3^2\times5$

Méthode : Pour décomposer 1836 en facteurs premiers

1836

Exercice 7 : Décomposer en facteurs premiers 84 puis 180.

IV Fractions irréductibles

Définition : Une fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur n'ont aucun facteur premier en commun.

Exemple : $\dfrac{45}{28}=\dfrac{3\times3\times5}{2\times2\times7}$ donc $\dfrac{45}{28}$ est irréductible.

Méthode : Pour "rendre" une fraction irréductible, on la simplifie par les facteurs premiers communs au numérateur et au dénominateur.

Exercice 8 : Donner l'écriture irréductible de la fraction $\dfrac{84}{180}$.

V Mémento calculatrice

Numworks	TI 83 (82)	Casio Graph 90+E (35+EII)
Menu Calculs Boîte à outils **Arithmétique** → *rem*(p,q) reste de la div euclidienne *quo*(p,q) quotient de la div euclidienne. *factor*(n) décomposition en facteurs premiers	math → **NBRE** (**NUM**) 0 : *reste*(p,q) (0 : *remainder*(p,q)) reste de la division euclidienne 3 : *ent*(p/q) quotient de la division euclidienne	MENU **1. Exe-Mat** SHIFT CATALOG MOD(p,q) reste de la division euclidienne Int(p/q) quotient de la division euclidienne

