Suites et récurrence

I Généralités

Définition : Une suite réelle u est une fonction définie sur l'ensemble des nombre entiers naturels $\mathbb{N}$ et à valeurs dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{array}$$

L'image de n par u se note $u(n)$ (notation fonctionnelle) ou de manière plus usuelle u_n (notation indicielle). L'ensemble des termes de la suite se note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore (u_n).

Remarque : Ne pas confondre (u_n) avec u_n.

Deux mode de description d'une suite

- **Suites décrites explicitement**

  On peut calculer chaque terme de manière explicite, séparément les uns des autres.

  Exercice 1 : Les suites a et b sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = n + (-1)^n$ et $b_n = \dfrac{3}{n+1}$.

  Calculer les quatre premiers termes et le neuvième terme de chaque suite.

- **Suites décrites par récurrence**

  La suite est définie par la donnée d'un ou de plusieurs premiers termes et par une relation entre un terme et un ou plusieurs termes précédents. Pour calculer chaque terme, il faut donc avoir calculer les termes précédents.

  Exercice 2 : La suite c est définie par $c_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{3}{c_n + 1}$.

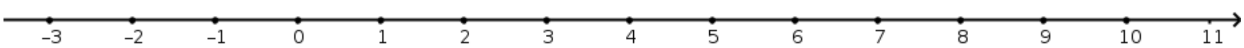
  La suite d est définie par $d_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = \sqrt{d_n + 1}$.

  Calculer les quatre premiers termes et le neuvième terme de chaque suite.

Représentation des termes d'une suite suivant sont mode de description

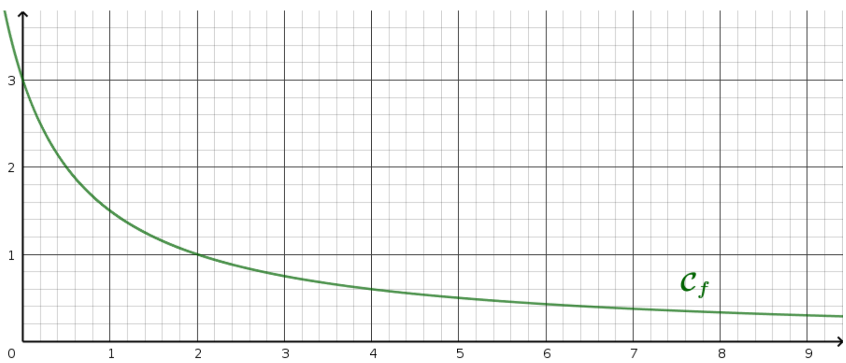
- Représentation directe, sur un axe, des points d'abscisse u_n.

  Exercice 3 : Représenter les premiers termes de la suite (a_n) avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n + (-1)^n$.



- Dans un repère, utilisation du graphique de la fonction qui définit explicitement (u_n).

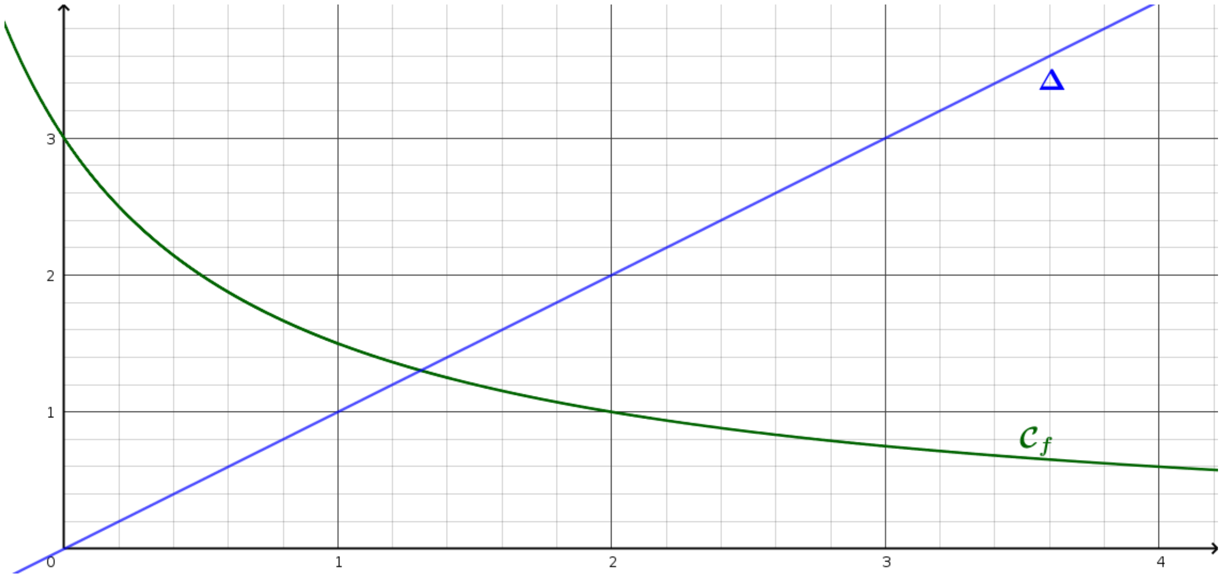
  Exercice 4 : Représenter les premiers termes de la suite (b_n) avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{3}{n+1}$.



- Dans un repère, utilisation du graphique de la fonction de qui définit (u_n) par récurrence.

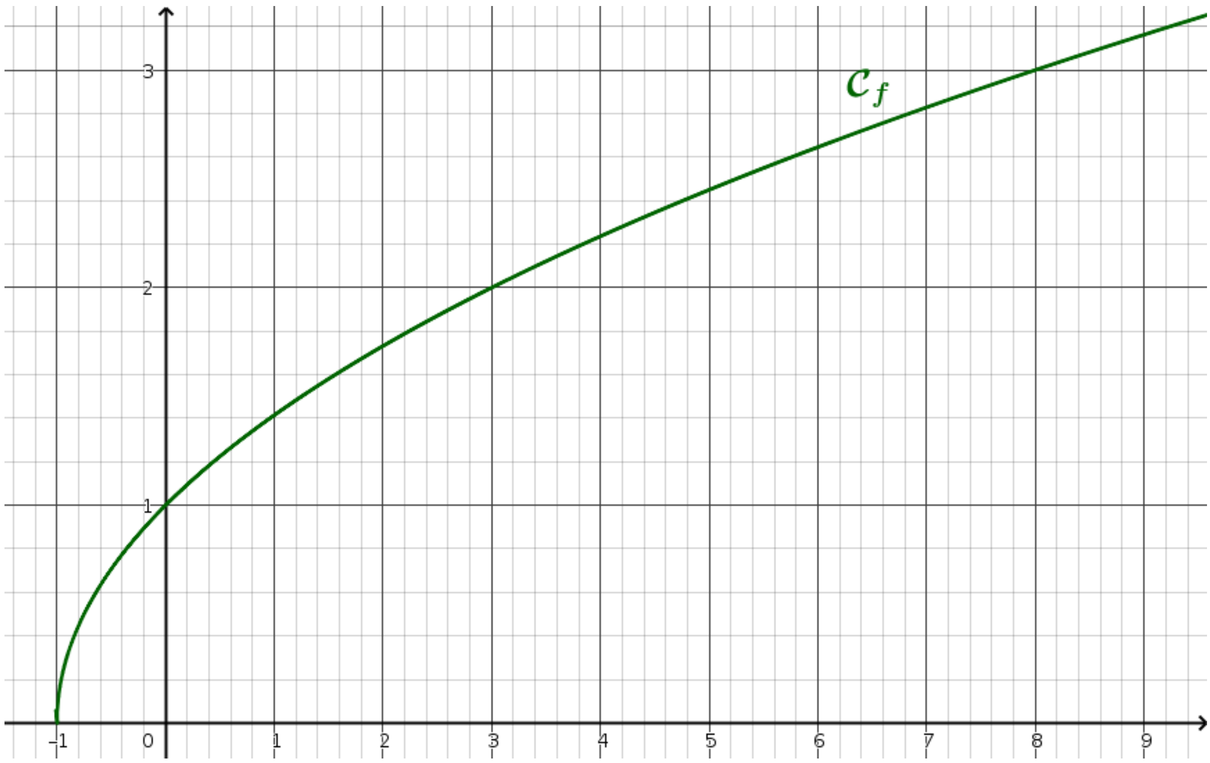
Exercice 5 :

Représenter les premiers termes de la suite (c_n) avec, $c_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{3}{c_n + 1}$.



Exercice 6 :

Représenter les premiers termes de la suite (d_n) avec, $d_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = \sqrt{d_n + 1}$.



II Sens de variation d'une suite

Définitions :

- Une suite (u_n) est croissante à partir de l'indice n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n < u_{n+1}$.
- (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice n_0 si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est constante si, pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante à partir du premier terme.

Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite

Suivant les cas, on peut :

- Étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$,
  - si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors la suite est croissante;
  - si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors la suite est décroissante.
- Comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à l'unité.

  Si les termes sont tous strictement positifs (respectivement négatifs),
  - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors la suite est croissante (resp. décroissante),
  - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors la suite est décroissante (resp. croissante).
- Étudier la fonction qui définit explicitement la suite.

  Soit (u_n) une suite définie explicitement, pour tout entier $n \geqslant n_0$, par $u_n = f(n)$.

  Si f est monotone sur $[n_0, +\infty[$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que f.

Exercice 7 :

1) Montrer que la suite (a_n) avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n + (-1)^n$, n'est ni croissante, ni décroissante.
2) Montrer que la suite (b_n) avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{3}{n+1}$ est strictement monotone.
3) Montrer que la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - 6n + 1$ est croissante pour $n \geq 3$.
4) Montrer que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_{n+1} = v_n + n^2 - 2n + 1$ est monotone quel que soit le premier terme v_0.

III Suites majorées, minorées, bornées

Définitions :

- Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que,pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.
- Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que,pour tout entier n, $u_n \geqslant m$.
- Une suite est bornée si elle est à la fois minorée et majorée. C'est à dire, s'il existe un réel m et un réel M tels que pour tout entier n, $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Exercice 8 : Montrer que la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2 - \dfrac{1}{n^2+1}$ est bornée.

IV Raisonnement par récurrence

Démontrer directement qu'une propriété est vraie, pour tout entier, est parfois difficile, voire impossible. Le raisonnement par récurrence, c'est à dire par hérédité, est une alternative souvent intéressante.

Théorème : Le principe de récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété qui dépend d'un nombre entier naturel n.

Si la propriété $P(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

- $P(n_0)$ est vraie ;
- pour tout entier $k \geqslant n_0$, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Rédaction : Elle se fait en trois étapes.

- **Initialisation** On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** Soit un entier quelconque $k \geqslant n_0$. On suppose que $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence) et on montre alors que $P(k+1)$ est vraie.
- **Conclusion** D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Exercice 9 :

1) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 3$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4^{n+1} + 1$.

2) Inégalité de Bernoulli [1]

   Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

1. Jacques ou Jakob Bernoulli (Bâle, 1654-1705) est un mathématicien et physicien suisse

V Suites arithmétiques

1) Généralités

Définition : Une suite (u_n) est arithmétique lorsque chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent une constante $r \in \mathbb{R}$, appelée raison.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

Démonstration 1

Conséquence : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Démonstration 2

Exercice 10 : Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_3 = 1$ et $u_{11} = -23$. Calculer son premier terme et sa raison.

Remarque : Lorsque la suite (u_n) est arithmétique, les points $A_n(n; u_n)$ sont alignés. On parle alors d'évolution linéaire des termes.

2) Sens de variation

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante ;
- si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante ;
- si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.

Démonstration 3

Remarque : Dans le cas d'une suite arithmétique croissante, on parle de croissance linéaire et, dans le cas d'une suite arithmétique décroissante, on parle de décroissance linéaire.

3) Somme des termes consécutifs

Propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$. Ce qui s'écrit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

Démonstration 4

Corollaire : Pour une suite arithmétique (u_n) de raison r, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$.

Autrement dit, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}$

Démonstration 5

Exercice 11 : Calculer $S_1 = 17 + 18 + 19 + \cdots + 39$ puis $S_2 = 5 + 9 + 13 + \cdots + 85$.

VI Suites géométriques

1) Généralités

Définition : Une suite (u_n) est géométrique lorsque chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par une constante $q \in \mathbb{R}$, appelée raison.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$

Théorème : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q alors,pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$

Démonstration 6

Conséquence : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q alors,pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Démonstration 7

Exercice 12 : Soit (u_n) la suite géométrique telle que $u_4 = -384$ et $u_{11} = 3$. Calculer son premier terme et sa raison.

Remarque : Lorsque la suite (u_n) est géométrique, les points $A_n(n; u_n)$ sont situés sur la courbe d'une fonction exponentielle. On parle alors d'évolution exponentielle des termes.

2) Sens de variation

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$:

- Si $q > 1$, alors (u_n) est strictement croissante pour $u_0 > 0$ et strictement décroissante pour $u_0 < 0$;
- si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante pour $u_0 > 0$ et strictement croissante pour $u_0 < 0$;
- si $q = 1$ ou $q = 0$, alors la suite (u_n) est constante;
- si $q < 0$, alors la suite (u_n) n'est pas monotone. Elle oscille entre des valeurs positives et négatives.

Démonstration 8

Remarque : Dans le cas d'une suite géométrique croissante, on parle de croissance exponentielle et, dans le cas d'une suite géométrique décroissante, on parle de décroissance exponentielle.

3) Somme des termes consécutifs

Propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ $\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$. Ce qui s'écrit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.

Démonstration 9

Corollaire : Pour une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Autrement dit, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}$

Démonstration 10

Exercice 13 : Calculer $S_3 = 16 + 32 + 64 + \cdots + 16384$.