Fonctions composées et dérivées

I Fonctions composées

Définition : Soit une fonction u définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeur dans un intervalle J et une fonction v définie sur l' intervalle J.

La fonction composée de u par v, notée $v \circ u$ est la fonction définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$.

$$\boxed{v \circ u \ : \ \begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{u} & J & \xrightarrow{v} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) & \longmapsto & v(u(x)) \end{array}}$$

Exercice 1 : Soit les fonctions $u(x) = 3x + 5$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Sur quel intervalle la fonction $v \circ u$ est-elle définie ? Donner son expression, en fonction de x, sur cet intervalle.

Propriétés :

- La composition des fonctions n'est pas commutative. En général, $v \circ u \neq u \circ v$.
- La composition des fonctions est associative, ce qui permet d'écrire $(w \circ v) \circ u = w \circ (v \circ u) = w \circ v \circ u$.

Démonstration 1

Exercice 2 : Soit les fonctions $u(x) = 3x + 5$, $v(x) = \sqrt{x}$ et $w(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$.

Donner l'expression de $w \circ v \circ u(x)$ puis celle de $v \circ w \circ u(x)$.

II Compléments sur la dérivation

1) Nombre dérivé

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

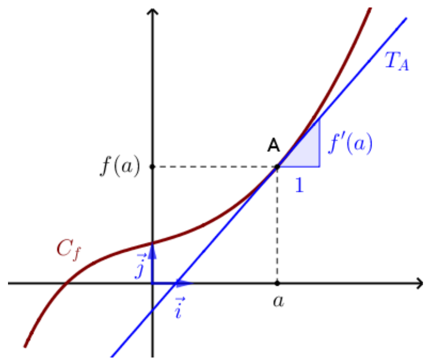
f est dérivable en a et admet le réel l comme nombre dérivé en a lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$.

Le nombre dérivé l de f en a est alors noté $f'(a)$. On a donc $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$.

2) Interprétation graphique

Si la fonction f est dérivable en a, le coefficient directeur de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est $f'(a)$.

L'équation de T_A est alors $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.

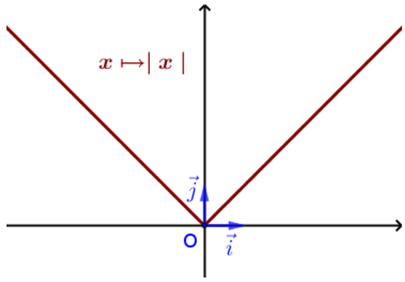


3) Fonction dérivée

Définition : Une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout point a de I. Dans ce cas, la fonction notée f' qui à tout réel $x \in I$, associe le nombre dérivé $f'(x)$, est appelée fonction dérivée de f.

$$\boxed{f' : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{array}}$$

Exercice 3 : Montrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.



4) Les dérivées usuelles

Fonction	Ensemble de définition	Ensemble de dérivation	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$

5) Opérations sur les dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Condition	Fonction dérivée
$u + v$		$u' + v'$
λu avec $\lambda \in \mathbb{R}$		$\lambda u'$
uv		$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$v(x) \neq 0$ pour $x \in I$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$v(x) \neq 0$ pour $x \in I$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 4 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = 4x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

b) $g(x) = \frac{1}{4x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = \frac{x^2+1}{2x+4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

d) $k(x) = \left(3x^2 + 5\right)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$

6) Dérivée d'une fonction composée

Théorème : Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeur dans un intervalle J et une fonction v définie et dérivable sur l'intervalle J.

La fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et $\boxed{(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)}$.

Autrement dit, pour tout $x \in I$, $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$.

Démonstration 2

Conséquences : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Condition	Fonction dérivée
e^u		$u'\mathrm{e}^u$
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$		$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour $x \in I$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Exercice 5 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = (3x^2 - 5x + 11)^5$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = \mathrm{e}^{7x^3 - 8x^2 + x - 1}$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 7}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 : Soit f définie par $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer la dérivée de f sur son ensemble de définition.

c) En déduire le tableau de variations de f.

7) Dérivée seconde

Définition : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' sa fonction dérivée.

Lorsque f' est dérivable sur I, la fonction f est dite deux fois dérivable sur I.

Dans ce cas, on note f'' la dérivée de f' et f'' est appelée dérivée seconde de f sur I.

On a donc, pour tout $x \in I$, $\boxed{f''(x) = (f'(x))'}$.

Exercice 7 : Soit la fonction $f(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée seconde.