Suites et limites

I Limite d'une suite

En examinant le comportement des termes d'une suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$, on peut dégager trois attitudes :

(1) Les termes deviennent aussi grands (ou aussi petits) que l'on veut.

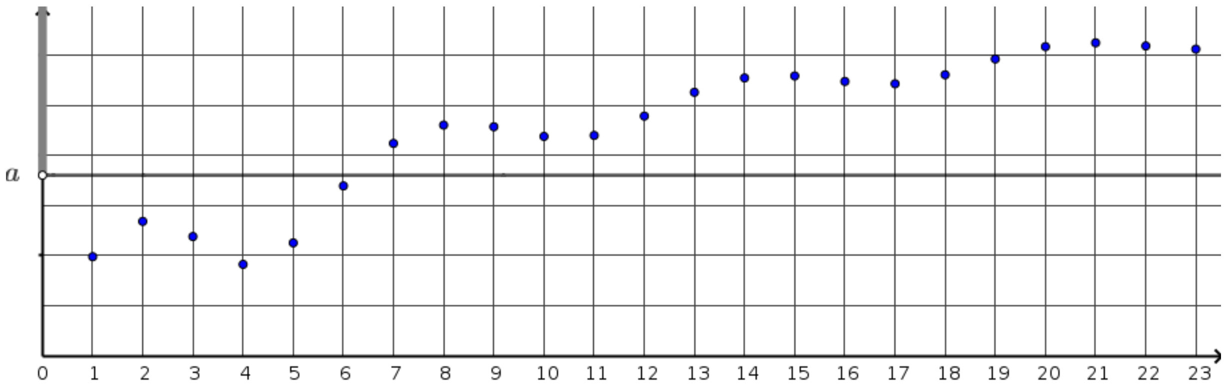
(2) Les termes se rapprochent, autant que l'on veut, d'une valeur réelle.

(3) Les termes ont une autre attitude que les deux précédentes.

Dans le cas (2) on dit que la suite (u_n) est convergente et dans les cas (1) et (3) que la suite est divergente. Nous allons préciser ces comportements.

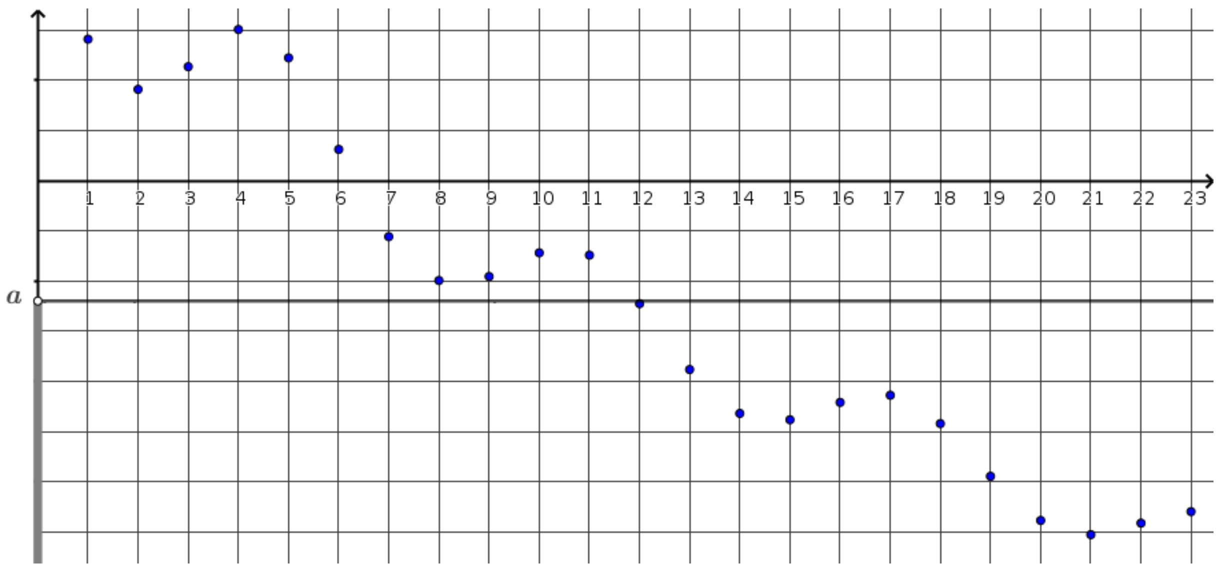
1) Limite infinie d'une suite

Définition : Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque tout intervalle $]a;+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Dans ce cas, on dit que la suite est **divergente** et on note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ ou encore $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.



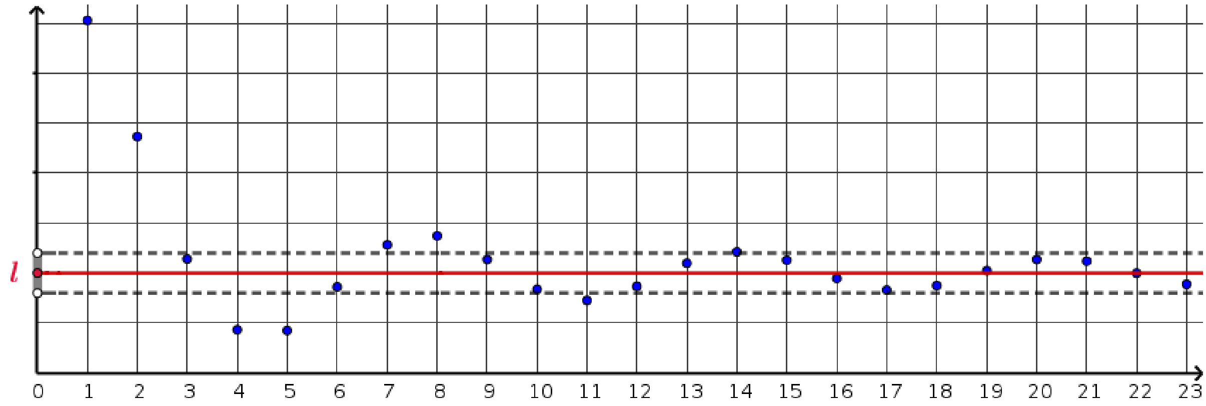
Exercice 1 : Conjecturer la limite des suites $(\sqrt{n})$, (n) et (n^2) puis les justifier.

Définition : Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ lorsque tout intervalle $]-\infty;a[$ avec $a \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Dans ce cas, on dit que la suite est **divergente** et on note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$ ou encore $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty}$.



2) Limite finie d'une suite

Définition : Une suite (u_n) a pour limite le réel l lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Dans ce cas, on dit que la suite est **convergente** et on note $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l}$ ou encore $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l}$.

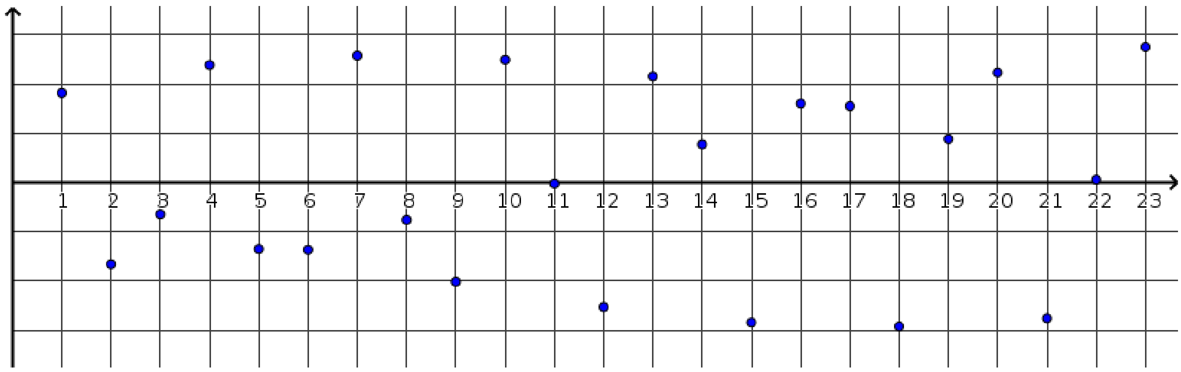


Propriété : Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite convergente est unique. *(admis)*

Exercice 2 : Conjecturer la limite des suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ puis les justifier.

3) Les autres cas

Définition : Une suite qui n'a ni limite finie, ni limite infinie est, dans ce cas aussi, **divergente**.



Exercice 3 : Observer le comportement à l'infini des suites $((-1)^n)$ et $(\sin(n))$

II Limite de suites particulières

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$ alors, la suite (u_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$ alors, la suite (u_n) est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration 1

Propriété : La suite géométrique (q^n) de raison $q > 1$ est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Démonstration 2 *utiliser l'inégalité de Bernoulli (Chapitre 1)*

III Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

Exercice 4 : Compléter les égalités ci-dessous puis émettre un premier constat.

$$\begin{cases} u_n = 2n \\ v_n = -3n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots \end{cases} \quad \text{or, } u_n + v_n = \dots \quad \text{donc } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = \dots$$

$$\begin{cases} u_n = 3n \\ v_n = -2n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots \end{cases} \quad \text{or, } u_n + v_n = \dots \quad \text{donc } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = \dots$$

$$\begin{cases} u_n = n \\ v_n = -n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots \end{cases} \quad \text{or, } u_n + v_n = \dots \quad \text{donc } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = \dots$$

Propriété : Soit (u_n) et (v_n) deux suites et deux réels l et l'.

Le tableau suivant donne $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$ lorsqu'elle existe :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	l'	$+\infty$
$+\infty$			
l			
$-\infty$			

Exercice 5 : Calculer la limite des suites $\left(n^2 + 5n - 7\right)$ et $\left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

2) Limite d'un produit

Exercice 6 : Compléter les égalités ci-dessous puis émettre un premier constat.

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{n} \\ v_n = n^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots \end{cases} \quad \text{or, } u_n \times v_n = \dots \quad \text{donc } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = \dots$$

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{n^2} \\ v_n = n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots \end{cases} \quad \text{or, } u_n \times v_n = \dots \quad \text{donc } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = \dots$$

$$\begin{cases} u_n = n \\ v_n = \frac{1}{n} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dots \end{cases} \quad \text{or, } u_n \times v_n = \dots \quad \text{donc } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = \dots$$

Propriété : Soit (u_n) et (v_n) deux suites et deux réels l et l'.

Le tableau suivant donne $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$ lorsqu'elle existe :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$-\infty$	$l' < 0$	$l = 0$	$l' > 0$	$+\infty$
$+\infty$					
$l > 0$					
$l = 0$					
$l < 0$					
$-\infty$					

Exercice 7 : Calculer la limite des suites $\left(\left(2 + \frac{1}{n}\right)\sqrt{n}\right)$ et $\left(4n^2 - 12n + 15\right)$.

3) Limite d'un inverse

Propriété : Soit une suite (u_n) et un réel l, le tableau suivant donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ lorsqu'elle existe :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	$l \neq 0$	$l = 0$ et $u_n < 0$	$l = 0$ et $u_n > 0$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$					

Exercice 8 : Calculer la limite des suites $\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$.

Propriété : La suite géométrique (q^n) de raison $0 < q < 1$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Démonstration 3

4) Limite d'un produit

Puisque $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$ alors les deux tableaux précédents permettent de conclure.

Exercice 9 : Calculer la limite des suites $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{4+\frac{1}{n}}\right)$ et $\left(\dfrac{n+4}{n^2-3}\right)$.

IV Algorithmes de seuil

Soit (u_n) une suite définie par la récurrence $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Seuil de croissance

On suppose que (u_n) est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

L'algorithme ci-contre détermine le rang à partir duquel les termes de la suite seront tous supérieurs à la valeur seuil A.

Exercice 10 : Écrire un programme Python pour déterminer le rang à partir duquel, tous les termes de la suite géométrique de premier terme 5 et de raison 3 dépasse 10^5.

```
n ⟵ 0
u ⟵ a
Tant que u < A faire
    u ⟵ f(u)
    n ⟵ n+1
FinTantque
Afficher n
```

2) Seuil d'approximation

On suppose que (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

L'algorithme ci-contre détermine le rang à partir duquel les termes de la suite seront plus proches de l que la valeur seuil $\epsilon > 0$.

```
n ⟵ 0
u ⟵ a
Tant que |u − l| > ϵ faire
    u ⟵ f(u)
    n ⟵ n+1
FinTantque
Afficher n
```

Exercice 11 : Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{1}{3}u_n \end{cases}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{21}{4} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{15}{4}$.
2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{15}{4}$.
3) Écrire un programme Python pour déterminer le rang à partir duquel, tous les termes de la suite approchent la limite à 10^{-5} près.