Comparaisons et limites des suites

Partie A : Une limite par comparaison

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \mathrm{e}^n$ et $v_n = \mathrm{e}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$.

1) Déterminer la nature de la suite (u_n) et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \mathrm{e}^n \times \mathrm{e}^{n^2+\frac{1}{4}}$.
3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.
4) Conjecturer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ puis, en revenant à la définition, démontrer cette conjecture.

Partie B : Une limite par encadrement

Soit les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{-1}{n} \qquad v_n = \frac{\cos(n)}{n} \qquad w_n = \frac{1}{n}$$

.

1) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
2) Rappeler les limites de (u_n) et (w_n) .
3) Représenter les trois suites simultanément sur la calculatrice.
   Quelle conjecture apparaît à propos de la suite (v_n) ?

Partie C : Une limite par monotonie

Lors de sa création au 1er janvier 2020, un club de sport avait 300 adhérents. A la fin de sa première année, les trois quarts des adhérents se sont réinscris et 120 nouveaux membres ont adhéré.

Pour tout entier naturel n, on appelle a_n le nombre d'adhérents du club, exprimé en centaines, n années après la création du club.

On suppose que le nombre d'adhérents évolue de la même façon les années suivantes.

1) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} en fonction de a_n .
2) Montrer, par récurrence, que la suite (a_n) est majorée par 4,8 .
3) Montrer que la suite (a_n) est strictement croissante.
4) Représenter la suite (a_n) sur la calculatrice.
   Que peut-on conjecturer sur la convergence de cette suite ?