Suites et comparaisons

I Limites et comparaisons

Théorème de comparaison :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang n_0, $u_n \leqslant v_n$.

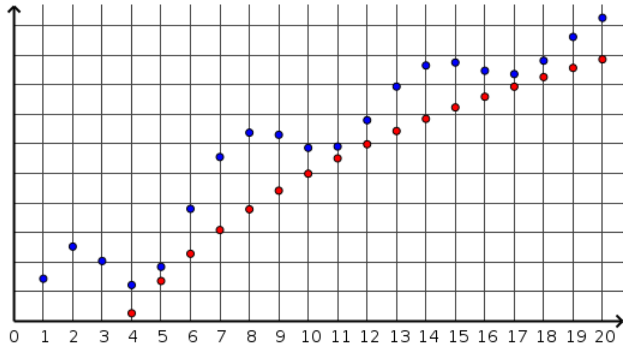
Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) diverge aussi vers $+\infty$.

Autrement dit, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Illustration :

(u_n) en rouge

(v_n) en bleu



Démonstration 1

Exercice 1 :

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\times(-1)^n + 3n = +\infty$

Théorème analogue :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang n_0, $u_n \leqslant v_n$.

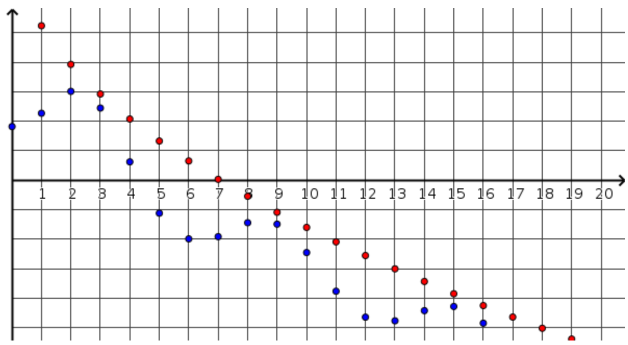
Si (v_n) diverge vers $-\infty$ alors (u_n) diverge aussi vers $-\infty$.

Autrement dit, si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Illustration :

(u_n) en bleu

(v_n) en rouge



Exercice 2 :

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\cos(n) - 3n^2 + 5n = -\infty$

Propriété : Inégalité et limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang n_0, $u_n \leqslant v_n$.

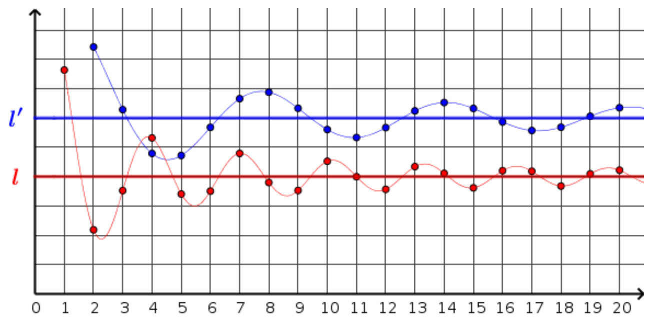
Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) converge vers $l' \in \mathbb{R}$ alors $l \leqslant l'$.

Autrement dit, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors $l \leqslant l'$.

Illustration :

(u_n) en rouge

(v_n) en bleu



Exercice 3 : (u_n) et (v_n) sont définies pour $n \geqslant 1$ par

$$u_n = 2 + \frac{3\times(-1)^n}{n} \quad \text{et} \quad v_n = 3 + \frac{4\times(-1)^{n+1}}{n}$$

Graphiquement, à partir de quel rang $u_n \leqslant v_n$? Comparer les limites des deux suites.

II Limites et encadrements

Théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes) :

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang n_0, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ alors (v_n) converge aussi vers l.

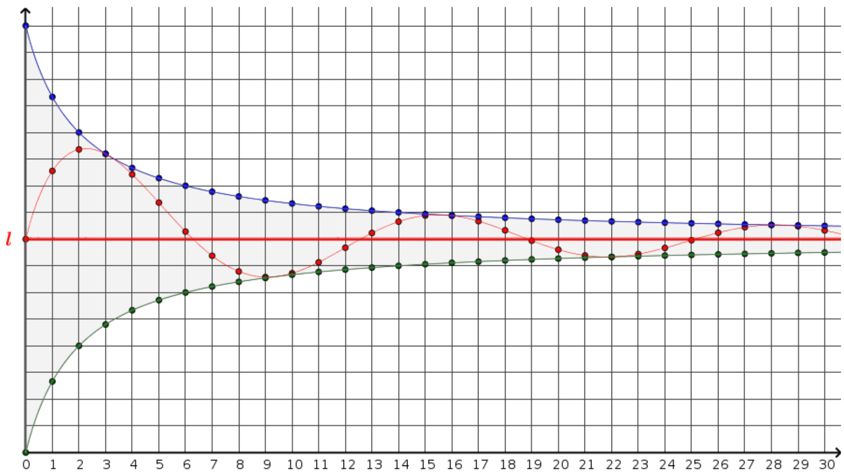
Autrement dit, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Illustration :

(u_n) en vert

(v_n) en rouge

(w_n) en bleu



Exercice 4 : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{\sin(3n)}{\sqrt{n}}$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

III Limite des suites géométriques

Propriété : La suite géométrique q^n de raison $-1 < q < 1$ converge vers 0.

Démonstration 2

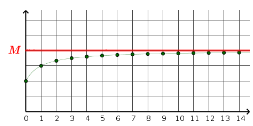
Exercice 5 : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = 8 + \dfrac{5 \times (-2)^n}{3^{n+1}}$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

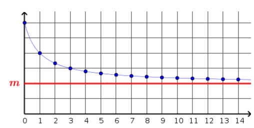
IV Convergence des suites monotones

Propriétés :

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite croissante n'est pas majorée alors elle est divergente.



- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante n'est pas minorée alors elle est divergente.



Démonstration 3

Exercice 6 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

a) Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est majorée par 4.

b) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

c) Que peut-on conclure sur le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini ?

d) Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

