Analyse de deux parcours

On étudie les parcours de deux automobilistes.

Le premier roule régulièrement pendant deux heures à 80 km/h puis, enchaîne à 140 km/h durant une heure.

Le second roule régulièrement à 130 km/h durant les deux premières heures puis ralentit à 70 km/h sur la dernière heure.

Pour chaque automobiliste,

1) Représenter la distance parcourue en fonction du temps dans un repère utilisant 3 carreaux ou 3 cm pour une heure en abscisses et 1 carreau ou 1 cm pour 40 km en ordonnées.
2) Calculer la distance parcourue et la vitesse moyenne.
3) Sur le même graphique, représenter la distance qu'il aurait parcourue, en fonction du temps, en roulant régulièrement à cette vitesse moyenne.
4) Observer la position relative des deux courbes.

Caractérisation de la position relative d'une courbe et de l'une de ses cordes

Le plan est muni d'un repère et on considère deux points $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$.

Soit $M(x_M\ ;\ y_M)$ un point de la droite (AB).

1) Caractériser les trois situations suivantes à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BA}$.
   a) Le point M appartient à la demi-droite $[BA)$ sans appartenir au segment $[AB]$.
   b) Le point M appartient au segment $[AB]$.
   c) Le point M appartient à la demi-droite $[AB)$ sans appartenir au segment $[AB]$.
2) En déduire que $M \in [AB]$ si, et seulement si, il existe un réel $t \in [0\ ;\ 1]$ tel que :

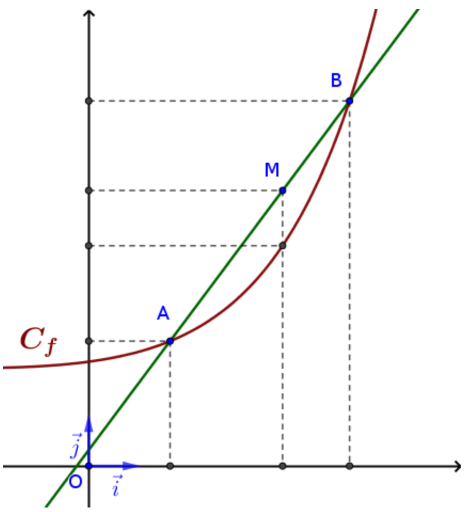
$$\begin{cases} x_M = tx_A + (1-t)x_B \\ y_M = ty_A + (1-t)y_B \end{cases}$$

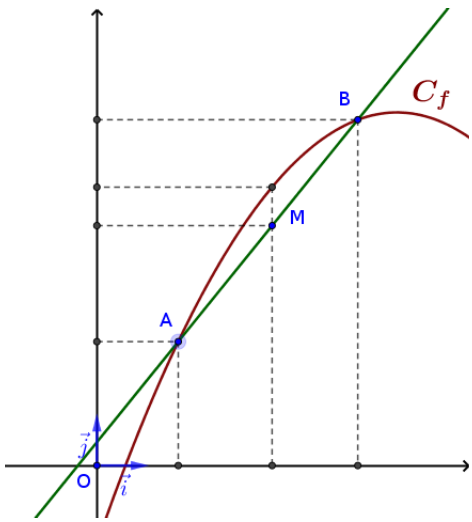
3) Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[x_A\ ;\ x_B]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

   Le point M du segment $[AB]$ est associé au réel $t \in [0\ ;\ 1]$.

   On veut caractériser les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de la sécante $[AB]$.

   Comparer $f(tx_A + (1-t)x_B)$ et $tf(x_A) + (1-t)f(x_B)$ dans les deux situations suivantes.





Modélisation d'un toboggan

Afin de réduire au maximum les risques d'incidents, les toboggans sont soumis à des normes et des régulations très strictes, notamment vis à vis de leur pente maximale.

Pour un toboggan de un mètre de haut destiné à une aire de jeu, on estime qu'il est aux normes si la valeur absolue de sa pente ne dépasse à aucun moment 1,5.

Un constructeur veut commercialiser un nouveau modèle de toboggan modélisé ci-dessous par $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 1 \text{ si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Avant de le commercialiser, le constructeur veut s'assurer que ce toboggan respecte bien les normes en vigueur.

1) Justifier que f est continue sur $[0\ ;\ 2]$.

2) Donner une expression de f', la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que f' est continue sur $[0\ ;\ 2]$.

3) a) Donner une équation des tangentes à la courbe en $x = 0$, en $x = 0,5$, en $x = 1,5$ et en $x = 2$.

   b) Comparer les pentes des tangentes à la courbe en $x = 0$ et en $x = 0,5$.
   Comparer ensuite les pentes des tangentes à la courbe en $x = 1,5$ et en $x = 2$.
   Comment semble évoluer la pente du toboggan entre 0 et 1 ?
   Comment semble évoluer la pente du toboggan entre 1 et 2 ?
   En quel point la valeur absolue de la pente semble-t-elle être maximale ?

4) a) Donner une expression de la fonction dérivée seconde de f, notée f''.
   En déduire le tableau des variations de la fonction f'.

   b) Sur quel intervalle la fonction f' est-elle croissante ?
   Sur quel intervalle la fonction f' est-elle décroissante ?
   En quelle valeur admet-elle un extremum ? Combien vaut-il ?

   c) Sur quel intervalle la fonction f semble-t-elle convexe ?
   Sur quel intervalle la fonction f semble-t-elle concave ?

   d) En conclusion, ce nouveau modèle de toboggan respecte-t-il bien les normes en vigueur ?