

Limites des fonctions

Partie A : Des fonctions usuelles

On étudie les quatre fonctions $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $h(x) = \sqrt{x}$ et $k(x) = e^x$.

- 1) Représenter ces quatre fonctions sur le même écran de la calculatrice et paramétrer la fenêtre pour des abscisses allant de -5 à 5 et des ordonnées allant de -10 à 10.
- 2) Pour chaque fonction dresser et justifier son tableau de variation. Celui-ci sera complété au fur et à mesure des questions.

3) Comportement quand x devient grand.

- a) À l'aide du graphique, conjecturer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x)$.
- b) Déterminer un réel $x > 0$ tels que $f(x) > 10^3$ puis que $f(x) > 10^9$.
- c) Déterminer un réel $x > 0$ tels que $g(x) < 10^{-2}$ puis que $g(x) < 10^{-6}$.
- d) Déterminer un réel $x > 0$ tels que $h(x) > 10^2$ puis que $h(x) > 10^3$.
- e) Déterminer un réel $x > 0$ tels que $k(x) > 10^3$ puis que $k(x) > 10^9$.

4) Comportement quand x devient petit.

- a) À l'aide du graphique, conjecturer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x)$.
- b) Déterminer un réel $x < 0$ tels que $f(x) < -10^3$ puis que $f(x) < -10^9$.
- c) Déterminer un réel $x < 0$ tels que $g(x) < 10^{-2}$ puis que $g(x) < 10^{-6}$.
- d) Déterminer un réel $x < 0$ tels que $k(x) < 10^{-3}$ puis que $k(x) < 10^{-9}$.

5) Comportement quand x se rapproche de zéro.

- a) À l'aide du graphique, conjecturer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.
- b) Déterminer un réel $x > 0$ tels que $g(x) > 10^4$ puis que $g(x) > 10^6$.
- c) Déterminer un réel $x < 0$ tels que $g(x) > 10^4$ puis que $g(x) > 10^6$.
- d) Déterminer un réel $x > 0$ tels que $h(x) < 10^{-2}$ puis que $h(x) < 10^{-3}$.

Partie B : Une fonction homographique

On considère la fonction homographique p définie pour tout $x \neq -1$ par $p(x) = \frac{2x+5}{x+1}$.

- 1) Calculer la dérivée p' de la fonction p .
- 2) En déduire les variations de p et les résumer dans un tableau.
- 3) A l'aide d'une représentation sur la calculatrice conjecturer les limites de la fonction p aux bornes de son ensemble de définition.