Écoute aléatoire de musique

Une playlist est composée de dix morceaux de musique. On l'écoute de manière aléatoire et des répétitions sont possibles. On souhaite déterminer la probabilité que l'un des morceaux (le préféré) soit entendu plusieurs fois lors d'une écoute.

Partie A : Épreuve de Bernoulli

On définit une expérience aléatoire élémentaire qui consiste à diffuser au hasard un morceau de la playlist.

Cette expérience n'a que deux issues possibles :

- Le succès, noté S, « Le morceau préféré est diffusé » ;
- L'échec, noté $\overline{S}$, « Le morceau préféré n'est pas diffusé ».

Donner la probabilité de S puis celle de $\overline{S}$.

> Une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues est une épreuve de Bernoulli dont le paramètre est la probabilité du succès.

Partie B : Trois répétitions de cette épreuve de Bernoulli

On définit une nouvelle expérience aléatoire qui consiste, lors de l'écoute aléatoire de trois morceaux de musique de la playlist, à noter à chaque fois si le morceau préféré est diffusé. Cette expérience aléatoire est donc la répétition, par trois fois, de manière indépendante, de l'épreuve de Bernoulli définie au A.

1) Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré.
2) On définit la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès lors de la diffusion des trois premiers morceaux, c'est-à-dire le nombre de fois où le morceau préféré a été diffusé.

   Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer l'espérance de X et en donner une interprétation.

> La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès lors de trois répétitions, de manière indépendante, de l'épreuve de Bernoulli définie au A, suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ (nombre de répétitions) et $p = 0,1$ (probabilité du succès) et qui est notée $\mathcal{B}(3; 0,1)$.

Partie C : Quatre répétitions de l'épreuve de Bernoulli

On répète quatre fois, de manière indépendante, l'épreuve de Bernoulli définie au A. Autrement dit, on écoute, au hasard, quatre morceaux de musique de la playlist et on note à chaque fois si le morceau préféré est diffusé. La variable aléatoire Y compte le nombre de succès lors de la diffusion des quatre morceaux, c'est-à-dire le nombre de fois où le morceau préféré a été diffusé.

1) Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré.
2) Déterminer la probabilité des événements $(Y = 0)$ et $(Y = 4)$.
3) Soit l'événement $(Y = 2)$.
   a) Combien d'issues réalisent $(Y = 2)$?
   b) En déduire la probabilité de $(Y = 2)$.
4) Déterminer la loi de probabilité de Y puis calculer $E(Y)$ et l'interpréter.

> La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès lors de quatre répétitions, de manière indépendante, de l'épreuve de Bernoulli définie au A, suit la loi binomiale de paramètres $n = \ldots$ et $p = \ldots$.
> On note $Y \sim \mathcal{B}(\ldots;\ldots)$.
> Le nombre d'issues réalisant 2 succès parmi les 4 essais se dit « Nombre de combinaisons de 2 parmi 4 ».
> Ce nombre entier naturel est noté $\binom{4}{2}$ et . On a donc $\binom{4}{2} = \ldots$.

Partie D : Cinq répétitions de l'épreuve de Bernoulli

On répète cinq fois, de manière indépendante, l'épreuve de Bernoulli définie au A. Autrement dit, on écoute, au hasard, cinq morceaux de musique de la playlist et on note à chaque fois si le morceau préféré est diffusé. La variable aléatoire Z compte le nombre de succès lors de la diffusion des cinq morceaux, c'est-à-dire le nombre de fois où le morceau préféré a été diffusé.

Dans cette partie, on décide de ne va pas refaire un nouvel arbre, mais de l'imaginer.

1) Déterminer la probabilité des événements $(Z=0)$, $(Z=5)$ et $(Z=1)$.
2) Soit l'événement $(Z=2)$, voici comment déterminer le nombre de chemins qui mènent à $(Z=2)$:
   a) Si un tel chemin se termine par S, combien de succès doit-il rencontrer lors des quatre répétitions précédentes ? Combien de chemins correspondent à cette situation ?
   b) Si un tel chemin se termine par $\overline{S}$, combien de succès doit-il rencontrer lors des quatre répétitions précédentes ? Combien de chemins correspondent à cette situation ?
   c) En déduire une relation entre $\binom{5}{2}$, $\binom{4}{1}$ et $\binom{4}{2}$.
   d) Calculer, grâce à la partie C, le nombre de chemins qui mènent à $(Z=2)$ puis calculer $P(Z=2)$.
3) Déterminer la loi de probabilité de Z puis calculer $E(Z)$.

La variable aléatoire Z qui compte le nombre de succès lors de cinq répétitions, de manière indépendante, de l'épreuve de Bernoulli définie au A, suit la loi binomiale de paramètres $n=\dots$ et $p=\dots$. $Z\sim\mathcal{B}(\dots;\dots)$.

Partie E : Dix répétitions de l'épreuve de Bernoulli

On répète dix fois, de manière indépendante, l'épreuve de Bernoulli définie au A. Autrement dit, on écoute, au hasard, dix morceaux de musique de la playlist et on note à chaque fois si le morceau préféré est diffusé. La variable aléatoire S compte le nombre de succès lors de la diffusion des dix morceaux, c'est-à-dire le nombre de fois où le morceau préféré a été diffusé.

1) Déterminer la probabilité des événements $(S=0)$, $(S=10)$ et $(S=1)$.
2) Lors de cette expérience aléatoire, le nombre de chemins menant à $(S=2)$, c'est à dire le nombre d'issues réalisant 2 succès parmi 10 répétitions, noté $\binom{10}{2}$ peut-être obtenu grâce à la calculatrice :

   - **Numworks** : $\boxed{\text{Boîte à outils}}$ **Probabilités** ▷ **Dénombrement** ▷ $\binom{n}{k}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{10}$ ▽ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{EXE}}$
   - **TI** : $\boxed{10}$ $\boxed{\text{math}}$ **PROB 3 : Combinaison** $\boxed{2}$ $\boxed{\text{enter}}$
   - **Casio** : $\boxed{\text{Exe-Mat}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{10}$ $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F6}}$ ▷ $\boxed{\text{F3}}$ **PROB** $\boxed{\text{F3}}$ **nCr** $\boxed{2}$ $\boxed{\text{EXE}}$

3) Déterminer la loi de probabilité de S puis calculer $E(S)$.

La variable aléatoire S qui compte le nombre de succès lors de dix répétitions, de manière indépendante, de l'épreuve de Bernoulli définie au A, suit la loi binomiale de paramètres $n=\dots$ et $p=\dots$. $S\sim\mathcal{B}(\dots;\dots)$

Partie F : Le triangle de Pascal

Soit n et k des entiers naturels, le tableau ci-contre donnera, pour $k\leqslant n$, la valeur des $\binom{n}{k}$.

1) Barrer les cases qui n'ont pas à être complétées.
2) Justifier la valeur des $\binom{n}{n}$ et $\binom{n}{0}$ puis la reporter dans le tableau.
3) Comme dans le D, écrire une relation entre $\binom{n+1}{k+1}$, $\binom{n}{k+1}$ et $\binom{n}{k}$.
4) En déduire une méthode pour compléter le tableau.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						