

Un peu d'arithmétique

On dispose de 100 lampes numérotées de 1 à 100. Chacune est commandée par un interrupteur et, pour commencer, elles sont toutes éteintes.

À la première étape, on agit sur tous les interrupteurs, allumant ainsi toutes les lampes.

À la deuxième étape, on agit que sur les interrupteurs dont le numéro est un multiple de 2, ce qui éteint une partie des lampes.

À la troisième étape, on agit que sur les interrupteurs dont le numéro est un multiple de 3.

Et ainsi de suite...

On souhaite déterminer quelles seront les lampes restées allumées à la 100^e étape.

- 1) Donner les états de la lampe n° 2 lors des 6 premières étapes.
- 2) Donner les états des lampes n° 3 à 6 lors des 6 premières étapes.
Présenter les résultats dans un tableau.
- 3) Déterminer l'état final des lampes n° 12, 25, 68 et 81.
- 4) Conjecturer les lampes restant allumées à la 100^e étape puis démontrer la conjecture.

Triangles rectangles de côtés entiers

Partie A : Un cas particulier

Un triangle rectangle a des côtés de longueur entière. L'un des côtés de l'angle droit a pour longueur 6. On aimerait déterminer la longueur des deux autres côtés.

- 1) Notons x et y les longueurs recherchées avec $x > y$, vérifier que $(x - y)(x + y) = 36$.
- 2) Quels sont les diviseurs positifs de 36 ?
- 3) Quels sont les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $a \leq b$ et $ab = 36$?
- 4) En déduire les longueurs recherchées.

Partie B : Cas général

L'algorithme ci-dessous automatise la recherche des couples d'entiers naturels (a, b) tels que $ab = n$, où n est un entier naturel. E est la fonction partie entière, par exemple : $E(2, 1) = 2$, $E(\pi) = 3$.

```
Lire n
Pour i allant de 1 à E(√n) faire
    Si i est un diviseur de n alors
        Afficher i et n/i
    FinSi
FinPour
```

- 1) Traduire ce programme en langage Python et vérifier son fonctionnement.
- 2) Compléter ce programme pour qu'il donne aussi le nombre de diviseurs.
- 3) Soit a et b deux entiers naturels tels que $ab = n$ avec $a \leq b$.
 - a) Montrer que $a \leq \sqrt{n} \leq b$.
 - b) En déduire que le programme affiche bien tous les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $ab = n$.
- 4) Justifier, à l'aide de ce qui précède, qu'un entier naturel n a un nombre fini de diviseurs entiers naturels.