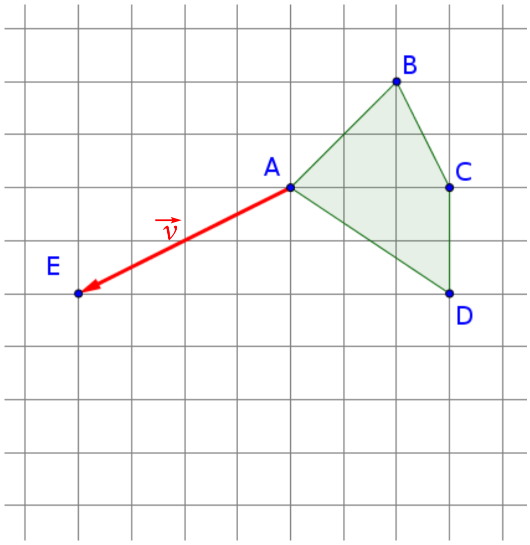
Vecteurs

I Définition

Un vecteur est une notation synthétique contenant les trois caractéristiques d'une translation.

- La direction
- Le sens
- La longueur



Exemple :

Construire l'image du quadrilatère ABCD par la translation t qui transforme A en E.

t est la translation suivant le vecteur $\overrightarrow{AE}$ ou $\vec{v}$

Par cette translation le quadrilatère ABCD "glisse"

- dans la direction de la droite (AE)
- dans le sens de A vers E
- sur la longueur AE

Propriété (Rappel) :

N est l'image de M par la translation suivant le vecteur $\overrightarrow{AE}$ si, et seulement si, AENM est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Corollaire :

N est l'image de M par la translation suivant le vecteur $\overrightarrow{AE}$ si, et seulement si, [EM] et [AN] ont le même milieu.

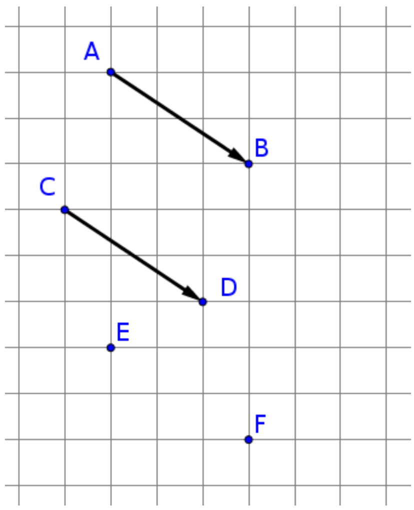
II Égalité de vecteurs

Définition : Deux vecteurs sont égaux s'ils caractérisent la même translation.

Autrement dit, deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

Propriétés :

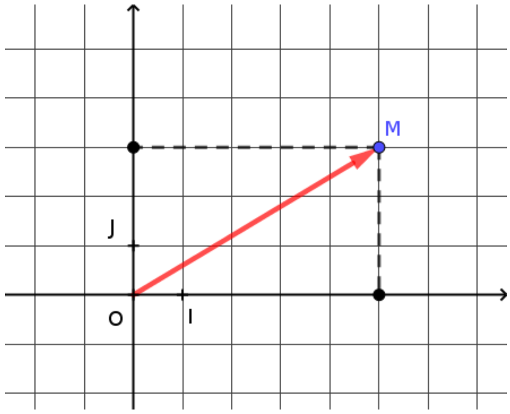
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, D est l'image de C par la translation suivant le vecteur $\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, [AD] et [BC] ont le même milieu



Cas particuliers :

- Le vecteur nul $\vec{0}$ caractérise la transformation identité du plan
  $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\dots$
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}$ si, et seulement si, B=M
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BN}$ si, et seulement si, B est le milieu de [AN]
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont des vecteurs opposés, s'ils ont même direction, et même longueur mais des sens contraires.
  On note $\overrightarrow{FE}=-\overrightarrow{AB}$

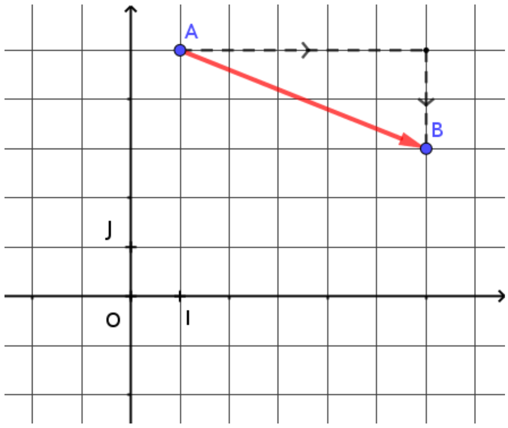
III Coordonnées d'un vecteur dans un repère



Le plan est muni d'un repère $(O;I;J)$

Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$ et le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.
Autrement dit, M est l'image de O par la translation suivant $\vec{u}$.
Si $M(x;y)$ alors les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Sur la figure :



Propriété : Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$

Sur la figure :

Démonstration 1

Propriété : Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

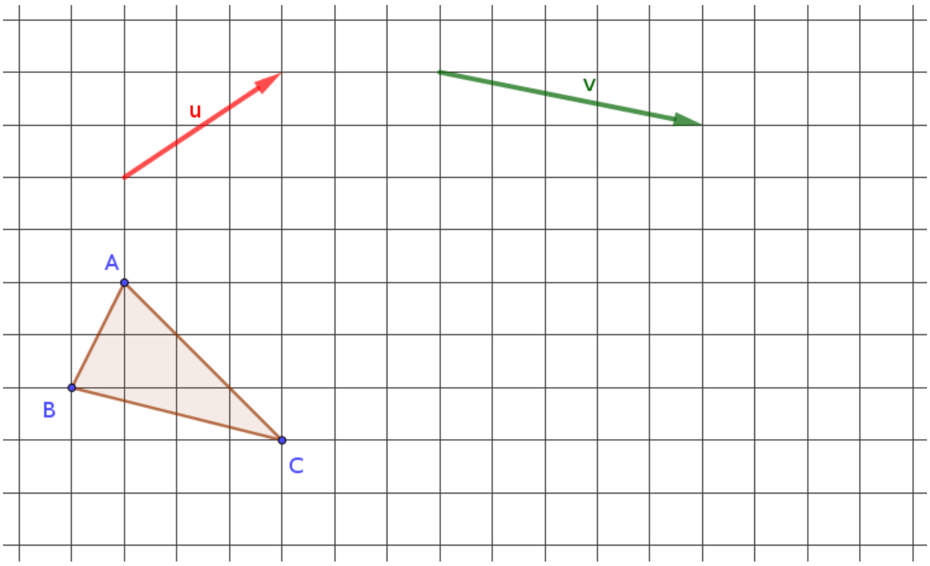
IV Somme de deux vecteurs

Propriété : L'enchaînement de deux translations, quel qu'en soit l'ordre, est une translation.

Exemple :

1) Construire l'image de ABC par $t_{\vec{u}}$ puis l'image de cette image par $t_{\vec{v}}$.

2) Construire l'image de ABC par $t_{\vec{v}}$ puis l'image de cette image par $t_{\vec{u}}$.



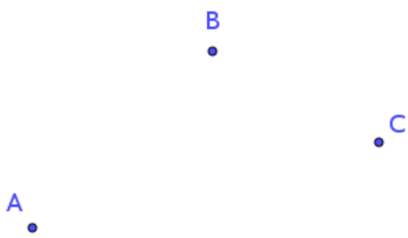
Définition : Le vecteur caractérisant la translation obtenue est appelé somme des deux vecteurs.

Sur l'exemple $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

Propriété : Relation de Chasles

Soit A, B et C trois points du plan.

La translation suivant $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation suivant $\overrightarrow{BC}$ est la translation suivant $\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

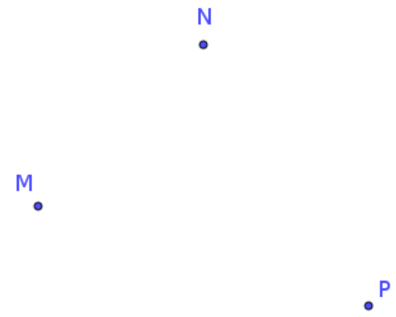


Remarque : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=$

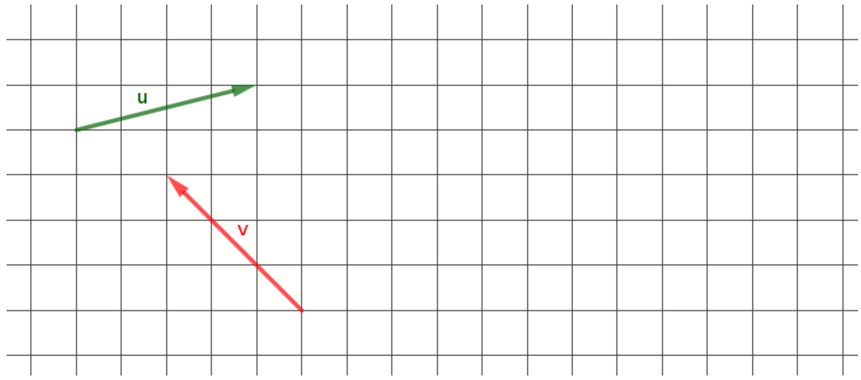
Propriété du parallélogramme

M, N et P sont trois points du plan.

On a $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$ lorsque Q est le quatrième sommet du parallélogramme MNQP.



Conséquence : Construction de la somme de deux vecteurs.



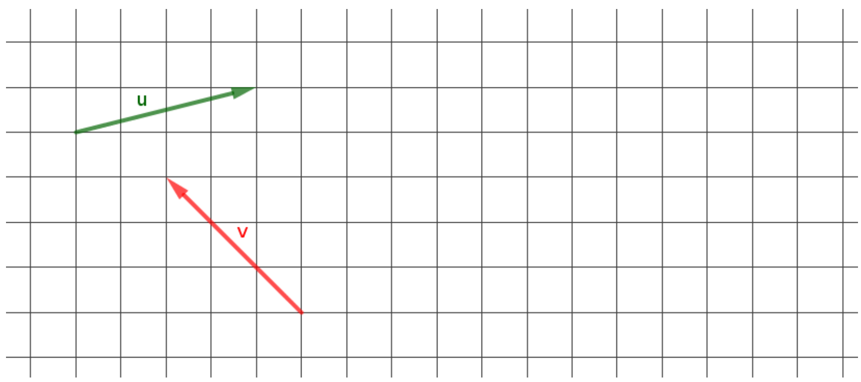
Propriété : Dans un repère du plan, Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Exercice 1 : Sur la figure précédente, munir le plan d'un repère (O ; I ; J), puis lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}+\vec{v}$. Contrôler la relation entre leurs coordonnées.

Puisque l'on dispose maintenant d'une somme de vecteurs et de vecteurs opposés alors on peut définir une différence de vecteurs.

Définition : Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ est défini par $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

Conséquence : Construction de la différence de deux vecteurs



Propriété : Dans un repère du plan, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$

Exercice 2 : Sur la figure précédente, munir le plan d'un repère (O ; I ; J), puis lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$. Contrôler la relation entre leurs coordonnées.

V Norme d'un vecteur

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$

Définition : La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la distance AB. On note $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$.

Propriété : Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors $\boxed{\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$.

Conséquence : Pour $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ on obtient $\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}}$.

