Repérage dans l'espace

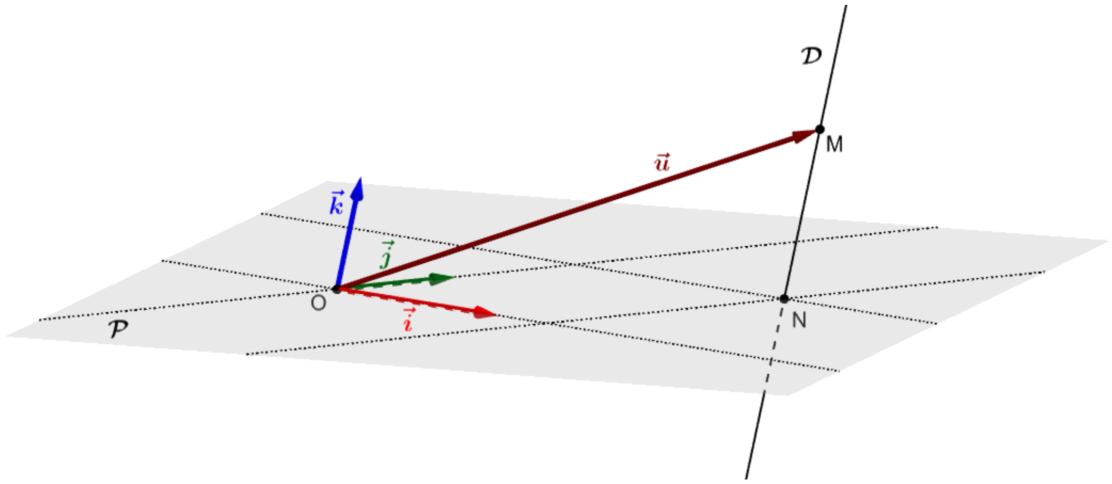
I Bases et repères de l'espace

1) Bases de l'espace

Définition : Trois vecteurs de l'espace linéairement indépendants forment une base de l'espace.

Propriété : Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

Tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
Autrement dit, il existe un unique triplet de réels (x, y, z) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



Démonstration 1

Définition : On dit alors que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2) Repères de l'espace

Définition : Un repère de l'espace est défini par la donnée d'un point O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Propriété : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Définition : On dit alors que le point M a pour coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note $M(x, y, z)$ avec x l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote du point M.

II Opérations sur les coordonnées

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriété : Soit un réel λ et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ et $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.

Démonstration 2

Exercice 1 : Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}-2\\-4\\12\end{pmatrix}$ dans l'espace muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
2) Donner les coordonnées de $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Propriété : Soient les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$.

Démonstration 3

Propriété : Soient les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.

Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}, \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Démonstration 4

Exercice 2 : Montrer que les points $A(4\,;-3\,;2)$, $B(5\,;-1\,;5)$ et $C(7\,;3\,;11)$ sont alignés.

III Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriété : Soit la droite $\mathcal{D}$ définie par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Le point $M(x, y, z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$.

Démonstration 5

Définition : Chaque point M de la droite $\mathcal{D}$ correspond à un unique réel t appelé paramètre du point M.

Le système obtenu est une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Remarque : Il existe une infinité de représentations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$. Celles-ci dépendent du point A et du vecteur $\vec{u}$.

Exercice 3 : Soient $A(2\,;3\,;1)$ et $B(1\,;-3\,;2)$.

1) Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB).
2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$