Vecteurs, droites et plans de l'espace

I Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur étudiée en géométrie plane.

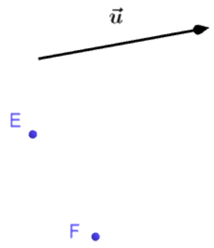
1) Translation

Définition : Soient A et B deux points de l'espace. La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation qui, à tout point C, associe l'unique point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Propriété : Soit E et F deux points de l'espace, $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace et t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

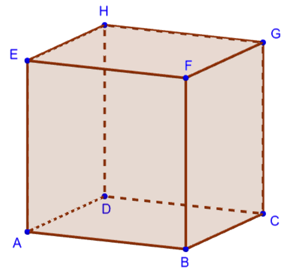
- E' et F' sont les images respectives de E et F par la translation t.
- $EE'F'F$ est un parallélogramme ;
- Les segments $[EF']$ et $[E'F]$ ont le même milieu ;
- $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{FF'}$;
- $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{E'F'}$.



Exercice 1 : Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le centre de la face $BCGF$.

Soit K l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Montrer que I est le milieu de $[AK]$.



2) Vecteurs colinéaires

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.

Remarques :

- Deux vecteurs colinéaires ont la même direction ;
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Propriété : Soient A, B et C trois points de l'espace deux à deux distincts.

Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Définition : Deux vecteurs de l'espace non colinéaires sont dits linéairement indépendants.

3) Vecteurs coplanaires

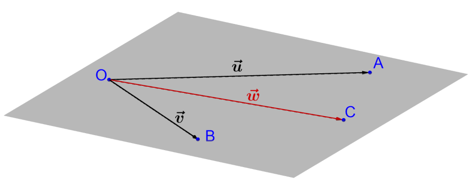
Définition : Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.

$\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ lorsqu'il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

Définition : Soient O, A, B et C quatre points de l'espace.

On définit les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires lorsque les points O, A, B et C sont eux-mêmes coplanaires.



CC-BY-NC-SA

Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

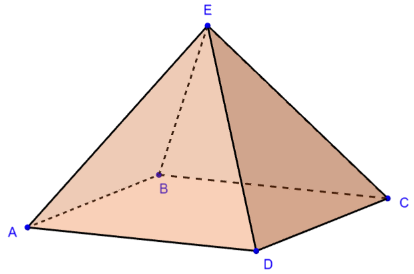
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration 1

Exercice 2 : Soit $ABCDE$ une pyramide de sommet E dont la base est le parallélogramme $ABCD$.

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



Définition : Trois vecteurs de l'espace non coplanaires sont dits linéairement indépendants.

Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, non colinéaires deux à deux.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants si, et seulement si, $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$.

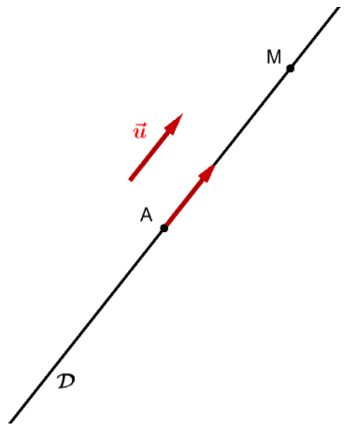
Démonstration 2

II Droites de l'espace

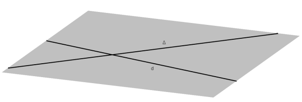
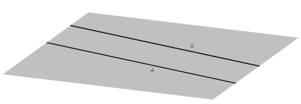
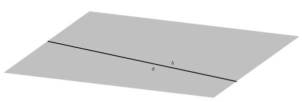
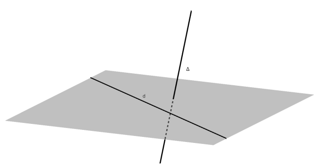
Définitions : Soient A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une droite.

Le couple $(A, \vec{u})$ est un repère de cette droite. La droite est dirigée par $\vec{u}$.



Propriété : Positions relatives de deux droites

Coplanaires			Non coplanaires
Sécantes	Parallèles		
	Strictement parallèles	Confondues	
			

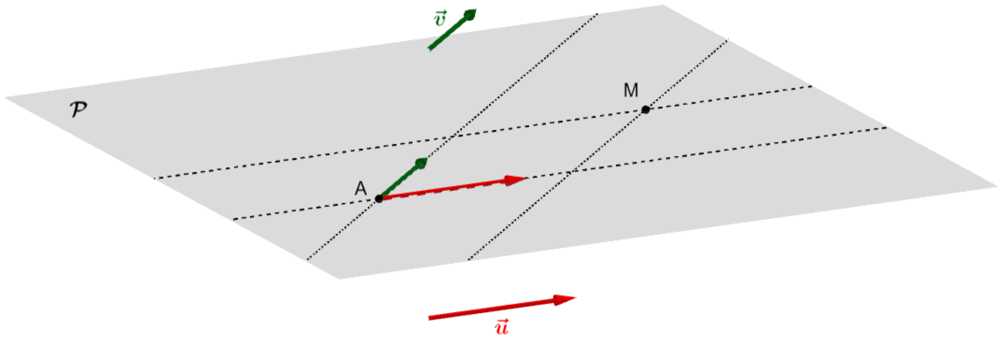
CC-BY-NC-SA

III Plans de l'espace

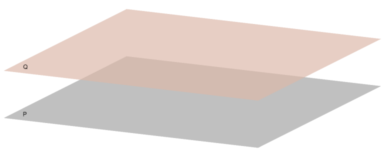
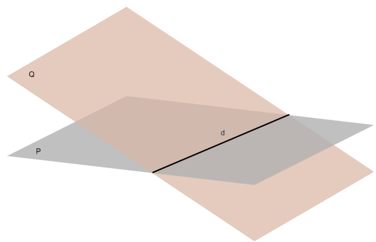
Définitions : Soient A un point de l'espace et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires.

L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ est un plan de l'espace.

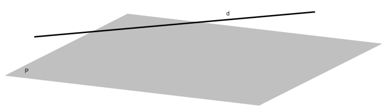
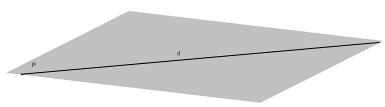
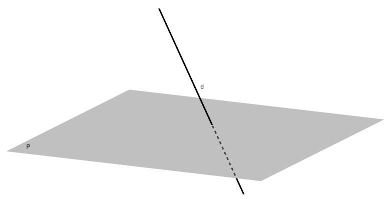
Le triplet $(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère de ce plan. Le plan est dirigé par la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



Propriété : Positions relatives de deux plans

Parallèles		Sécants
Strictement parallèles	Confondus	
		

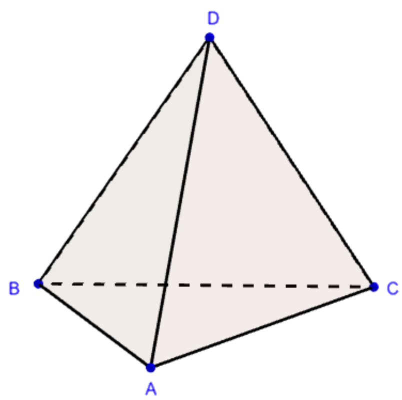
Propriété : Positions relatives d'une droite et d'un plan

Droite parallèle au plan		Droite sécante au plan
Strictement parallèle	Incluse	
		

Exercice 3 : Soit $ABCD$ un tétraèdre. Les points R, S et T sont définis par $\overrightarrow{AR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.

Déterminer l'intersection des plans (BCD) et (RST).

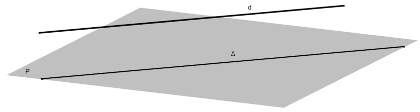
En déduire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (RST).



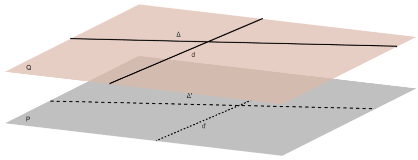
CC-BY-NC-SA

IV Parallélisme dans l'espace

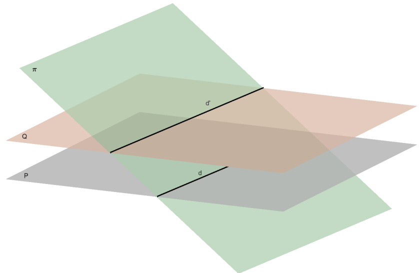
Théorème : Une droite est parallèle à un plan si, et seulement si, elle est parallèle à une droite de ce plan.



Théorème : Deux plans sont parallèles si, et seulement si, deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.



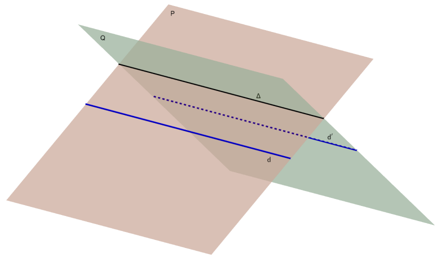
Théorème : Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



Théorème : (dit Théorème du toit)

Soient deux plans sécants et contenant respectivement deux droites d et d' parallèles entre elles.

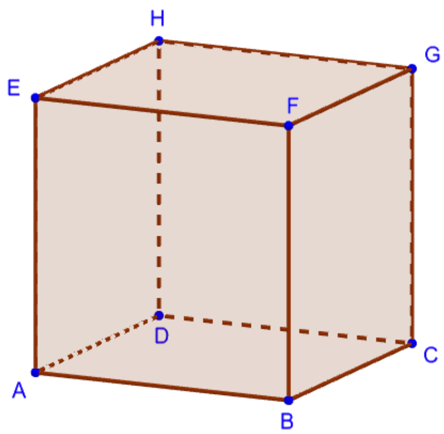
Alors la droite d'intersection Δ est parallèle à d et à d'.



Exercice 4 : Soit un cube $ABCDEFGH$ et les points I et J tels que $\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HD}$.

Déterminer l'intersection des plans (IJF) et (DCG).

En déduire la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJF).



CC-BY-NC-SA