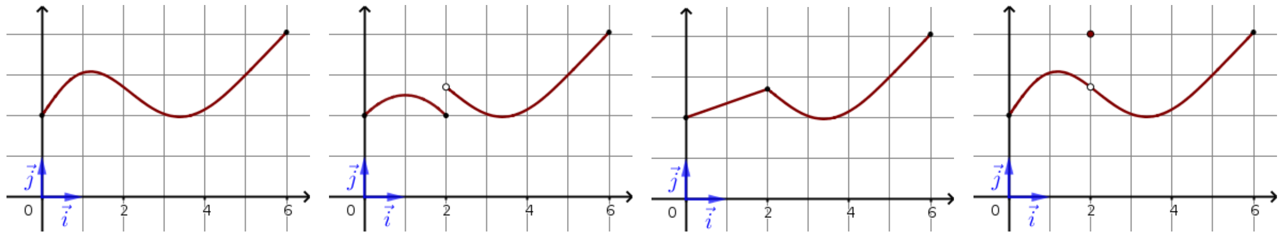
Fonctions et continuité

I Fonctions continues

<u>Définitions</u> : Soit f définie sur un intervalle ouvert I et a un réel appartenant à I.

- f est continue en a lorsque f admet une limite en a et que cette limite est $f(a)$.
- f est continue sur l'intervalle I lorsqu'elle est continue en tout $a \in I$.

<u>Exemples</u> : Retrouver les fonctions continues sur $[0;6]$ parmi celles représentées ci-dessous et justifier les réponses.



<u>Propriétés</u> : Continuité des fonctions de référence.

- Les fonctions puissance $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ sont continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Propriétés</u> : Opérations et fonctions continues

- La somme et le produit de fonctions continues sur un intervalle I sont continues sur I.
- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et si g ne s'annule pas sur I alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
- Soit f est une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J.

  Si $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

<u>Corollaire</u> :

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

<u>Exercice 1</u> : Retrouver les fonctions continues sur $[-1;+\infty[$ parmi les fonctions suivantes.

$$f(x) = \frac{3x^2-4}{x-1} \qquad g(x) = \sqrt{x+1} \qquad h(x) = |2x+1| - 7|3x-5| \qquad k(x) = \begin{cases} x+6 \text{ si } x \leqslant 3 \\ x^2 \text{ si } x > 3 \end{cases} \qquad m(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x \text{ si } x \leqslant 0 \\ 2x^3 - 7 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

<u>Propriété</u> : Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Démonstration 1

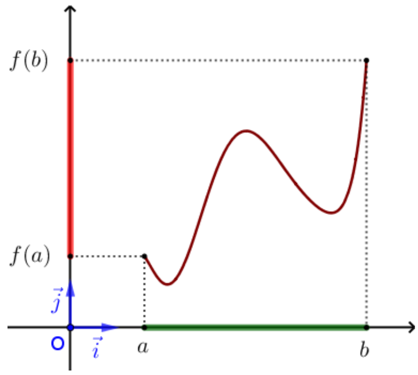
<u>Remarque</u> : La réciproque est fausse !

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Démonstration 2

II Théorème des valeurs intermédiaires

1) Cas général



Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ alors toute valeur k, intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, est prise au moins une fois par f.

Autrement dit, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Remarques :

- Le TVI indique l'existence de solutions mais il ne donne ni leur valeur, ni leur nombre.
- Si f n'est pas définie en a ou en b alors on peut remplacer $f(a)$ par $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$.
- a et b peuvent aussi être $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2-1$.

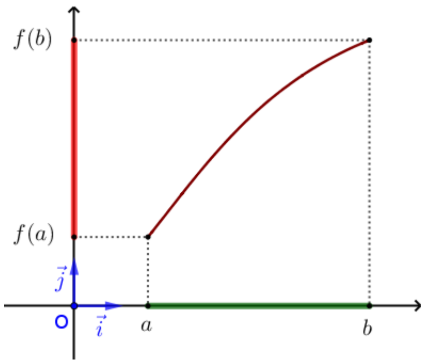
Montrer que les équations $f(x)=4$ et $f(x)=-2$ admettent au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

2) Cas des fonctions strictement monotones

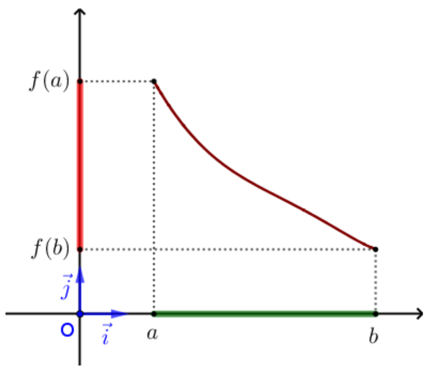
Corollaire : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ alors toute valeur k, intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, est prise exactement une fois et une seule par f.

Autrement dit, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Cas d'une fonction strictement croissante.



Cas d'une fonction strictement décroissante.



Démonstration 3

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2-1$.

Déterminer le nombre de solutions des équations $f(x)=4$ et $f(x)=-2$ sur $\mathbb{R}$.

III Théorème du point fixe

Théorème : Soit (u_n) une suite d'éléments d'un intervalle I définie par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est une fonction continue sur I.

Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$ alors ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$.

Démonstration 4

Exercice 4 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{3}{u_n+1}$.

On admet que (u_n) converge et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0\,;3]$. Déterminer la limite de la suite (u_n).